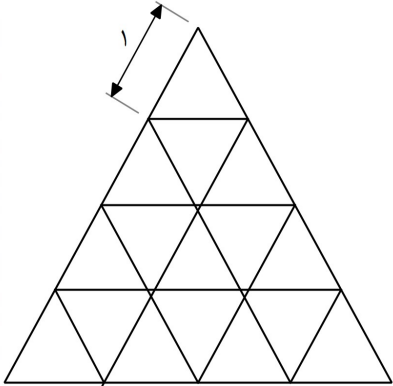


شماره ۱	نوبت: خرداد - شهریور	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: دوازدهم	سؤالات آزمون درس : ریاضیات گسسته
ردیف	سؤالات پاسخ‌برگ دارد- استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			
۱	درست بودن یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید. الف) به ازای هر عدد طبیعی n، عدد $2^n + 1$ عددی اول است. ب) اگر $a b$ و $b c$ در این صورت $a c$. پ) هر درایه روی قطر اصلی مربع لاتین چرخشی $n \times n$ برابر عدد ۱ است.			
۲	جاهای خالی را در جمله‌های زیر بطور مناسب کامل کنید. الف) اگر $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ در این صورت حاصل $(a, [a, b])$ برابر است. ب) تعداد γ-مجموعه‌های گراف $\overline{K_5}$ برابر است. پ) تعداد توابع یک‌به‌یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۵ عضوی برابر است.			
۳	a عددی صحیح و فرد است و $a+4 b$، باقی‌مانده تقسیم عدد $3a^2 - 5b^2 + 1$ بر ۸ را به دست آورید.			
۴	برای هر سه عدد حقیقی نامنفی a, b, c به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید: $2a + 2b + 2c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$			
۵	درسؤالات چهارگزینه‌ای زیر، گزینه صحیح را انتخاب کنید. ۱-۵) باقی‌مانده تقسیم عدد $7534x127$ بر ۱۱ برابر ۳ است رقم x کدام است؟ الف) ۱ ب) ۲ پ) ۳ ت) ۴ ۲-۵) به ازای چند مقدار برای $(a, 12)$، معادله سیاله خطی $ax + 12y = 90$ دارای جواب است؟ الف) ۲ ب) ۳ پ) ۴ ت) ۶ ۳-۵) رقم یکان عدد $A = 13^{1405} + 1$ کدام است؟ الف) ۱ ب) ۲ پ) ۳ ت) ۴ ۴-۵) مجموعه همسایگی بسته یک رأس در گراف کامل K_p، ۶ عضو دارد اندازه این گراف کدام است؟ الف) ۱۵ ب) ۱۰ پ) ۳۶ ت) ۲۱			
۶	در معادله هم‌نهشتی $9x \equiv 73 \pmod{7}$ کوچک‌ترین مقدار طبیعی برای x که به کلاس هم‌نهشتی $[1]_5$ تعلق دارد را تعیین کنید.			
۷	نشان دهید: $(5n + 4, 9n + 7) = 1$			

راهنمای نمره‌گذاری آزمون درس: ریاضیات گسسته		پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: خرداد - شهریور	شماره ۱
ردیف	راهنمای نمره‌گذاری				
۱	الف) نادرست (۰/۲۵) ب) درست (۰/۲۵) پ) درست (۰/۲۵)				
۲	الف) $ a $ (۰/۵) ب) ۱ (۰/۵) پ) ۶۰ (۰/۵)				
۳	عدد a فرد و $a+4$ پس b عددی فرد است. (۰/۲۵) $\begin{cases} a = 2k+1 & a^2 = 4k^2+4k+1 \\ b = 2k'+1 & b^2 = 4k'^2+4k'+1 \end{cases} \rightarrow 3a^2 - 5b^2 + 1 = 4m-1 \quad (۰/۲۵)$ $\rightarrow 3a^2 - 5b^2 + 1 = 4m-1+4-4 = 4t+7 \rightarrow r=7 \quad (۰/۲۵)$ $\underbrace{4m-1+4-4}_{4(m-1)+7} \quad (۰/۲۵)$				
۴	$2a+2b+2c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} \Leftrightarrow 2a+2b+2c - \sqrt{ab} - \sqrt{ac} - \sqrt{bc} \geq 0 \quad (۰/۲۵)$ $\Leftrightarrow (a - \sqrt{ab} + b) + (a - \sqrt{ac} + c) + (b - \sqrt{bc} + c) \geq 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} \geq 0 \quad (۰/۷۵)$ رابطه اخیر همواره برقرار است. (۰/۲۵)				
۵	۱-۵) ب (۰/۲۵) ۲-۵) پ (۰/۲۵) ۳-۵) ت (۰/۲۵) ۴-۵) الف (۰/۲۵)				
۶	$9x \equiv 73 \rightarrow \underbrace{(9-7)x \equiv 73-70}_{(۰/۲۵)} \rightarrow 2x \equiv 3 \rightarrow \underbrace{2x \equiv 1}_{(۰/۲۵)} \rightarrow \underbrace{x \equiv 5}_{(۰/۵)} \rightarrow x = 7k+5 \rightarrow \underbrace{x = 26 \in [1]}_{(۰/۲۵)}$				
۷	$(5n+4, 9n+7) = d \rightarrow \begin{cases} d \mid 5n+4 \\ d \mid 9n+7 \end{cases} \quad (۰/۲۵) \rightarrow \begin{cases} d \mid 45n+36 \\ d \mid 45n+35 \end{cases} \quad (۰/۲۵)$ $\rightarrow \underbrace{d \mid (45n+36) - (45n+35)}_{(۰/۲۵)} \rightarrow \underbrace{d \mid 1}_{(۰/۲۵)} \rightarrow d = 1$				
۸	الف) $N_G(e) = \{c, d, b, h\}$ (۰/۵) ب) ۷ دور (۰/۵) پ) $\deg_G(d) = 4$ (۰/۵) ت) ۶ یال (۰/۵)				

۹	الف) $\{b, f, e\}$ (۰/۵) ب) $\{b, d\}, \{c, d\}, \{a, d\} \rightarrow \gamma$ - مجموعه دو عضوی (۰/۵) پ) $\{f, e, g, a\}$ (۰/۵)
۱۰	الف) $\gamma(P_1) = 4$ (۰/۲۵) ب) $q(\overline{C_f}) = 2$ (۰/۲۵) پ) $\sum_{i=1}^5 d_{K_5}(v_i) = 20$ (۰/۲۵) ت) $\Delta(\overline{P_5}) = 3$ (۰/۲۵)
۱۱	الف (۰/۲۵) ب (۰/۲۵) پ (۰/۲۵)
۱۲	۱ $\frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} \times 1 = 90$ (۰/۲۵)
۱۳	۱/۵ $x_r^3 \rightarrow \begin{cases} x_r = 0 \rightarrow x_1 = 0 \xrightarrow{(0/25)} x_r + x_f = 8 \rightarrow \binom{9}{1} = 9 \text{ (0/25)} \\ x_r = 1 \rightarrow x_1 = 1 \xrightarrow{(0/25)} x_r + x_f = 6 \rightarrow \binom{7}{1} = 7 \text{ (0/25)} \end{cases} \xrightarrow{+} 9 + 7 = 16 \text{ (0/5)}$
۱۴	فرض کنیم A و B دو مربع لاتین متعامد باشند و B_1 مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت بر مربع B باشد. $A = \begin{bmatrix} a & & \\ & & a \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} c & & \\ & & c \end{bmatrix}$ $B_1 = \begin{bmatrix} b & & \\ & & b \end{bmatrix}$ ۱/۲۵ به فرض خلاف که A و B_1 متعامد نباشند (۰/۲۵) لذا دو جایگاه در مربع A وجود دارد که اعداد یکسانی (مثلاً a) در آنها قرار دارد (۰/۲۵) و در جایگاه های نظیر آنها در مربع B_1 اعداد یکسانی (مثلاً b) قرار دارد. (۰/۲۵) حال با توجه به تعریف جایگشت در همین دو مکان در مربع B باید اعداد یکسان (مثلاً c) باشد که با اعمال جایگشت، در B_1 به b تبدیل شده اند (۰/۲۵) و در این صورت A و B متعامد نخواهند بود و این تناقض با فرض مسئله دارد. (۰/۲۵)

۱/۵	$A = \left\{ n \in N \mid 1 \leq n \leq 1405, 3 \mid n \right\} \rightarrow A = \left\lfloor \frac{1405}{3} \right\rfloor = 468 \text{ (۰/۲۵)}$ $B = \left\{ n \in N \mid 1 \leq n \leq 1405, 7 \mid n \right\} \rightarrow B = \left\lfloor \frac{1405}{7} \right\rfloor = 200 \text{ (۰/۲۵)}$ $A \cap B = \left\{ n \in N \mid 1 \leq n \leq 1405, 3 \mid n, 7 \mid n \right\} \rightarrow A \cap B = \left\lfloor \frac{1405}{21} \right\rfloor = 66 \text{ (۰/۲۵)}$ $ \overline{A \cap B} = S - A \cup B = S - (A + B - A \cap B) = 1405 - (468 + 200 - 66) = 803 \text{ (۰/۲۵)}$ (۰/۵)	۱۵
۱	مطابق شکل، مثلث را به ۱۶ مثلث به طول ضلع ۱ تقسیم‌بندی می‌کنیم (۰/۲۵) که در این صورت اگر حداقل ۱۷ نقطه (۰/۲۵) از داخل این مثلث انتخاب کنیم طبق اصل لانه کبوتری مطمئن هستیم که حداقل یکی از این مثلث‌ها شامل دست‌کم ۲ تا از این نقاط خواهد بود (۰/۲۵) و فاصله این نقاط از ضلع مثلث‌های کوچک‌تر یعنی ۱ کمتر است. (۰/۲۵) 	۱۶
سپاس و خداقوت خدمت همکار گرامی		

سؤالات آزمون درس : ریاضیات گسسته	پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: خرداد - شهریور	شماره ۲
ردیف	سؤالات پاسخ‌برگ دارد- استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف) برای هر عدد طبیعی n بزرگتر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است. ب) اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ و $(c, m) = 1$ در این صورت $a \equiv b \pmod{m}$. پ) تعداد راس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است. ت) هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.			۱
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. الف) حاصل $([m^2, m], m^5)$ برابر است. $(0 \neq m \in \mathbb{Z})$ ب) معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر پ) اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + \overline{q(G)}$ برابر است. ت) عدد احاطه‌گری، گراف C_7 برابر است.			۱
۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) عدد 1405 به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟ (۱) $[4]$ (۲) $[0]$ (۳) $[2]$ (۴) $[1]$ ب) در گراف ۵-منتظم از مرتبه ۶، تعداد یال‌ها برابر است. (۱) 10 (۲) 15 (۳) 21 (۴) 28 پ) در کدام مورد دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود دارد؟ (۱) 1 (۲) 2 (۳) 4 (۴) 6 ت) تعداد تابع یک به یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۵ عضوی کدام است؟ (۱) 60 (۲) 15 (۳) 35 (۴) 53			۱
۴	با استفاده از روش برهان خلف، ثابت کنید اگر a یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{a}$ نیز گنگ است.			۰/۷۵
۵	ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.			۱
۶	اگر عدد طبیعی a دو عدد $9k + 7$ و $7k + 6$ را عاد کند، ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 5$.			۱
۷	اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.			۱/۵

۱/۵	۸	جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $7x + 5y = 11$ را به دست آورید.
۲/۲۵	۹	با توجه به گراف G: الف) مرتبه و اندازه گراف G را بنویسید. ب) مقدارهای $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ را بیابید. پ) مسیری به طول ۵ با شروع از رأس b بنویسید. ت) دوری به طول ۴ مشخص کنید. ث) مجموعه $N_G[b]$ را با نوشتن اعضا، مشخص کنید.
۲	۱۰	گراف مقابل را در نظر بگیرید: الف) عدد احاطه‌گری گراف را بدست آورید و ادعای خود را ثابت کنید. ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای آن ارائه کنید.
۰/۵	۱۱	یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.
۱	۱۲	۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره در یک هتل اسکان یابند؟
۱/۵	۱۳	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ با شرط $x_1 > 2$ و $x_5 \geq 4$ را محاسبه کنید.
۱/۵	۱۴	دو مربع لاتین متعامد 3×3 بنویسید. دلیل متعامد بودن آنها را بیان کنید.
۱/۵	۱۵	در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟
۱	۱۶	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن شویم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است. (سال غیر کبیسه)
۲۰	موفق باشید جمع	