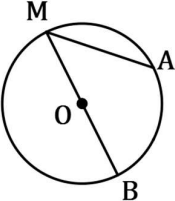
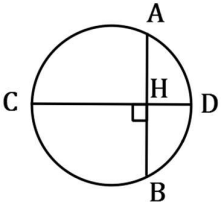
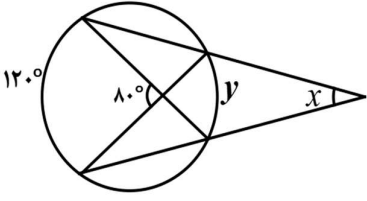
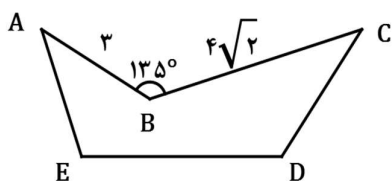


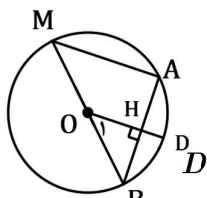
شماره ۱	نوبت: خرداد - شهریور	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: یازدهم	سؤالات آزمون درس: هندسه ۲
ردیف	سؤالات پاسخ‌برگ دارد- استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. الف) هر چندضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است. ب) تبدیل بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد. پ) تبدیل انتقال هیچ‌گاه نمی‌تواند یک تبدیل همانی باشد. ت) در مثلث ABC، $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$.			
۲	در هر قسمت، پاسخ مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) فاصله‌ی مرکز دایره‌ای از یک خط، بیشتر از شعاع دایره است. این خط و دایره نقطه اشتراک دارند. (یک - صفر) ب) یک چندضلعی، است اگر و فقط اگر عمود منصف‌های اضلاع آن در یک نقطه هم‌رس باشند. (محاطی - محیطی) پ) در تجانس به مرکز O و نسبت k؛ اگر $k < 0$ باشد، تجانس را می‌نامیم. (مستقیم - معکوس) ت) در مثلث ABC، داریم $BC = 10\text{ cm}$ و $\hat{A} = 30^\circ$. مقدار شعاع دایره محیطی مثلث برابر است. (۱۰ - ۲۰)			
۳	در شکل زیر، O مرکز دایره است. ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی $\hat{M}$، برابر با نصف اندازه‌ی کمان مقابل به آن زاویه است. 			
۴	در شکل مقابل، وتر AB بر قطر CD عمود است. ثابت کنید؛ قطر CD، وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند. 			
۵	با توجه به شکل، مقدار x را محاسبه کنید. 			

۶	در شکل زیر، MT به طول $3\sqrt{2}$ مماس بر دایره است. مقادیر عددی x و y را بدست آورید.	۱/۲۵
۷	طول شعاع‌های دو دایره متخارج را بدست آورید که طول مماس مشترک داخلی و خارجی آن‌ها به ترتیب ۲۴ و ۲۶ سانتی‌متر و طول خط‌المركزین آنها مساوی ۲۶ سانتی‌متر است.	۱/۵
۸	نشان دهید، اگر $ABCD$ یک چهارضلعی محیطی باشد آنگاه مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر با مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر است. (از شکل زیر استفاده کنید)	۱
۹	برای هر کدام از عبارات گروه A ، تبدیل مناسب را از گروه B انتخاب کنید. (یک مورد از گروه B اضافی است.)	۰/۵
۱۰	ثابت کنید؛ در هر تبدیل طولی، تبدیل یافته یک زاویه، زاویه ای هم اندازه آن است.	۱/۲۵
۱۱	کوتاه پاسخ دهید. الف) نقاط A' ، B' و C' به ترتیب دوران یافته نقاط A ، B و C هستند. روش یافتن مرکز دوران را شرح دهید.	۰/۵
۱۲	یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{2}{3}$ و به مرکز محل تلاقی قطرهای تصویر می‌کنیم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۵ باشد، محیط مربع اولیه را حساب کنید.	۱/۲۵

۱	در شکل زیر، می‌خواهیم بدون آن که محیط تغییر کند، مساحت را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت را حساب کنید. 	۱۳
۰/۵	طول میانه وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع زاویه قائمه ۱ سانتی‌متر و ۲ سانتی‌متر کدام است؟ الف) $\frac{5}{4}$ ب) $\frac{5}{2}$ ج) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ د) $\frac{\sqrt{5}}{4}$	۱۴
۱	مثلثی به طول اضلاع a, b و c با شعاع دایره محاطی داخلی به اندازه r و سه ارتفاع به طول‌های h_a, h_b و h_c را در نظر بگیرید. نشان دهید: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$	۱۵
۱ ۱/۵	مثلثی به طول اضلاع ۶، ۱۰ و ۱۴ را در نظر بگیرید. الف) با استفاده از قضیه کسینوس‌ها، اندازه زاویه مقابل به بزرگترین ضلع مثلث را حساب کنید. ب) به کمک دستور هرون، طول ارتفاع وارد بر کوچکترین ضلع مثلث را بدست آورید.	۱۶
۱/۵	در مثلث ABC داریم $AB = 7$، $AC = 4$ و $BC = 10$. طول نیمساز داخلی زاویه C را حساب کنید.	۱۷
۲۰	موفق باشید	جمع

شماره ۱	نوبت: خرداد - شهریور	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: یازدهم	راهنمای نمره‌گذاری آزمون درس: هندسه ۲		
نمره	راهنمای نمره‌گذاری					ردیف
۱	(الف) درست (ص ۲۹) (ب) درست (ص ۳۶) (پ) نادرست (ص ۴۸) (ت) نادرست (ص ۷۴) (هر مورد ۰/۲۵)					۱
۱	(الف) صفر (ص ۱۱) (ب) محاطی (ص ۲۴) (ت) ۱۰ (ص ۶۱) (هر مورد ۰/۲۵)					۲
۱/۲۵	مرکز دایره را به نقطه A وصل می کنیم. $OM = OA = R \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{A} \quad (۱) \quad (۰/۲۵)$ زاویه $\widehat{O_1}$ در مثلث OAM خارجی است. لذا $\widehat{O_1} = \widehat{M_1} + \widehat{A} \quad (۲) \quad (۰/۲۵)$ رسم شکل (۰/۲۵) $\xrightarrow{(۱) \text{ و } (۲)} \underbrace{\widehat{O_1} = ۲\widehat{M_1}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\widehat{BA} = ۲\widehat{M_1}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \widehat{M_1} = \frac{\widehat{BA}}{۲}$ روش دوم: وتر AB و شعاع عمود بر آن را رسم می کنیم. در نتیجه $OD \perp AB \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{DA} \Rightarrow \widehat{O_1} = \frac{\widehat{BA}}{۲} \quad (۰/۲۵) \quad \text{رسم شکل (۰/۲۵)}$ از طرفی چون در مثلث AMB میانه وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع است، لذا مثلث قائم الزویه است. (۰/۲۵) پس $\left. \begin{array}{l} MA \perp AB \\ OD \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow MA \parallel OD \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{O_1} \rightarrow \widehat{M} = \frac{\widehat{BA}}{۲} \quad (۰/۲۵)$ (۰/۲۵)					۳

روش سوم:



وتر AB و شعاع عمود بر آن را رسم می کنیم. در نتیجه

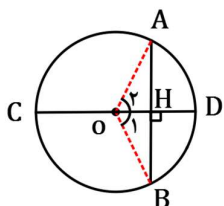
$$OH \perp AB \Rightarrow \underbrace{BH = AH, \widehat{BD} = \widehat{DA}}_{(0/25)}$$

رسم شکل (۰/۲۵)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{BO}{BM} = \frac{BH}{BA} = \frac{1}{2} \\ B = B \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\triangle OBH \sim \triangle MAB}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{\widehat{M} = \widehat{O_1} = \widehat{BD} = \frac{\widehat{AB}}{2}}_{(0/25)}$$

قضیه صفحه ۱۴

۴



$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \quad (0/25) \\ OH = OH \quad (0/25) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle AOH \cong \triangle BOH \quad (0/25)$$

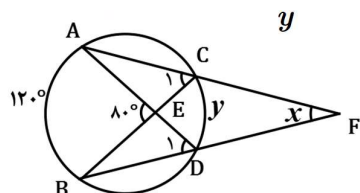
$$\underbrace{AH = BH}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{\widehat{O_1} = \widehat{O_2}}_{(0/25)} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BD} \quad (0/25)$$

صفحه ۱۳

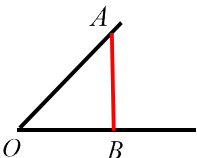
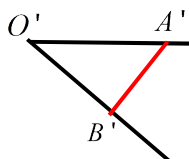
۵

روش اول:

$$\underbrace{\frac{120^\circ + y}{2} = 80^\circ}_{(0/25)}, \quad \underbrace{\frac{120^\circ - y}{2} = x}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{y = 40^\circ}_{(0/25)}, \quad \underbrace{x = 40^\circ}_{(0/25)}$$



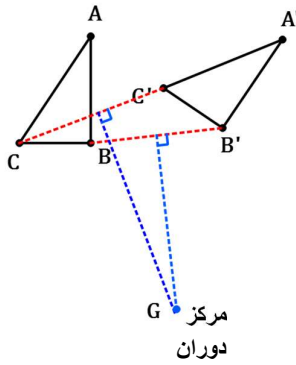
	روش دوم: با استفاده از ویژگی های زاویه محاطی و زاویه خارجی داریم: $\widehat{A} = \widehat{C}_1 + \widehat{A} = \frac{120^\circ}{2} + \widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = 20^\circ \quad (*)$ $\left. \begin{aligned} \widehat{D}_1 &= \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \\ \widehat{D}_1 &= \widehat{A} + x = 20^\circ + x \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 40^\circ \quad (0/25)$ مشابه تمرین ۲ ص ۱۶	
۱/۲۵	طبق قضیه: $x \times x = 2 \times 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \quad (0/25)$ طبق قضیه: $(3\sqrt{2})^2 = y(y+2) \Rightarrow y^2 + 2y - 18 = 0 \Rightarrow y = 2 \quad (0/25)$ صفحات ۱۸ و ۱۹	۶
۱/۵	فرض کنیم طول خط‌المركزين دو دایره برابر d و طول شعاع‌های آن‌ها R و R' باشد. $(R > R')$ طول مماس مشترک داخلی $= \sqrt{d^2 - (R + R')^2} \quad (0/25)$ $\Rightarrow 10^2 = 26^2 - (R + R')^2 \Rightarrow R + R' = 24 \quad (0/25)$ طول مماس مشترک خارجی $= \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \quad (0/25)$ $\Rightarrow 24^2 = 26^2 - (R - R')^2 \Rightarrow R - R' = 10 \quad (0/25)$ $\Rightarrow R = 17, R' = 7 \quad (0/5)$ مشابه تمرین ۵ صفحه ۲۳	۷
۱	روش اول: $\underbrace{AB + CD}_{(0/25)} = \underbrace{(AM + BM) + (DP + CP)}_{(0/25)} = \underbrace{(AQ + BN) + (DQ + CN)}_{(0/25)}$ $= \underbrace{(AQ + DQ) + (BN + CN)}_{(0/25)} = \underbrace{AD + BC}_{(0/25)}$	۸

	روش دوم: $AM = AQ = x, QD = DP = y \Rightarrow \begin{cases} MB = BN = AB - x \\ PC = CN = DC - y \end{cases} \quad (۰/۵)$ $\Rightarrow \underbrace{AD + CB = (x + y) + (AB - x + CD - y)}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{AB + CD}_{(۰/۲۵)}$ قضیه صفحه ۲۷	
۰/۵	الف) بازتاب $(۰/۲۵)$ صفحه ۴۸ ب) دوران $(۰/۲۵)$ صفحه ۴۳	۹
۱/۲۵	فرض کنیم T یک تبدیل طولیا باشد. در این صورت با توجه به شکل تحت T داریم: $T(O) = O', T(A) = A', T(B) = B' \quad (۰/۲۵)$  در نتیجه پاره خطهای AB، OB و OA به ترتیب به پاره خطهای $A'B'$، $O'B'$ و $O'A'$ تصویر می‌شوند. $(۰/۲۵)$. چون تبدیل طولیاست، داریم:  $O'A' = OA, O'B' = OB, A'B' = AB \quad (۰/۲۵)$ $\Rightarrow \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{A'O'B'} \Rightarrow \hat{O} = \overset{\wedge}{O'} \quad (۰/۲۵)$ رسم تصویر زاویه $(۰/۲۵)$ قضیه صفحه ۳۵ تذکر: به جواب مسأله، با رسم شکل و به صورت نوشتار فارسی به طور کامل، نیز نمره کامل داده شود	۱۰

۰/۵

محل هم‌رسانی عمود منصف‌های پاره خط‌های واصل بین هر نقطه و تصویرش، مرکز دوران است. (۰/۵)

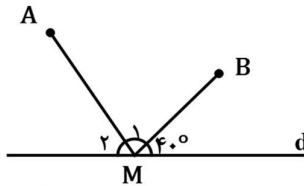
روش دوم: برای رسم شکل دقیق، نمره کامل منظور شود.



صفحه ۴۲

(ب)

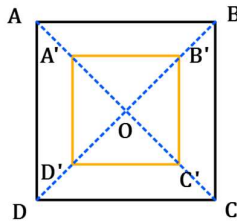
۰/۵



$$\hat{M}_2 = 40^\circ \Rightarrow \hat{M}_1 = 100^\circ$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

نتیجه سوال صفحه ۵۲

فرض کنیم $A'B'C'D'$ مجانس مربع $ABCD$ با تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{2}{3}$ باشد.

$$k = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{4}{9} \quad (۱) \quad (۰/۲۵)$$

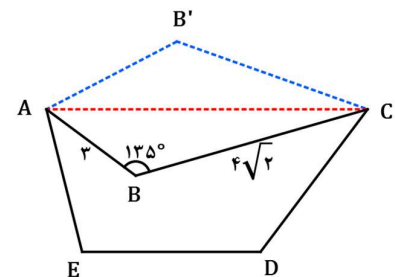
$$S_{ABCD} - S_{A'B'C'D'} = ۵ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱) \text{ و } (۲)} S_{ABCD} - \frac{4}{9} S_{ABCD} = ۵ \Rightarrow \frac{5}{9} S_{ABCD} = ۵ \Rightarrow S_{ABCD} = ۹ \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow AB = ۳ \quad (۰/۲۵) \quad \text{محیط مربع: } ۳ \times ۴ = ۱۲ \quad (۰/۲۵)$$

صفحه ۵۱

$$S_{ABC} = \underbrace{\frac{1}{2} \times ۳ \times ۴\sqrt{2} \times \sin ۱۳۵^\circ}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{۶\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}_{(۰/۲۵)} = ۶$$



رسم بازتاب (۰/۲۵)

۱

$$S_{ABCB'} = ۲S_{ABC} = ۱۲ \quad (۰/۲۵)$$

صفحه ۵۴

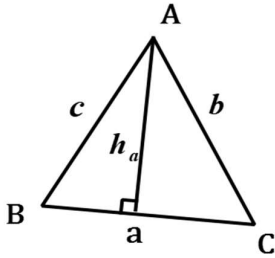
روش اول:

۱۵

$$S = \frac{1}{2} ah_a \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S} \quad (1) \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{2P}{2S} = \frac{1}{r} \quad (۰/۲۵)$$

$$\frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S} \quad (2) \quad (۰/۲۵)$$



$$h_a = c \sin B \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{1}{c \sin B} \quad (1) \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{به طور } \frac{1}{h_c} = \frac{1}{b \sin A}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{1}{a \sin C} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{c \sin B} + \frac{1}{a \sin C} + \frac{1}{b \sin A} \quad (۰/۲۵)$$

$$= \frac{a}{ca \sin B} + \frac{b}{ab \sin C} + \frac{c}{bc \sin A} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{2P}{2S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{r}$$

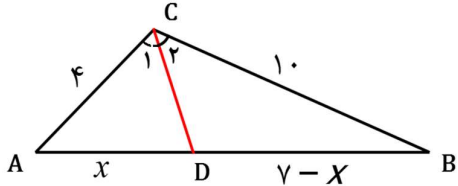
روش سوم:

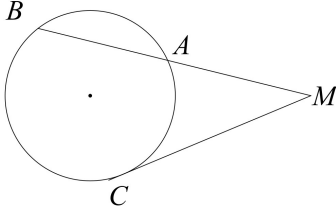
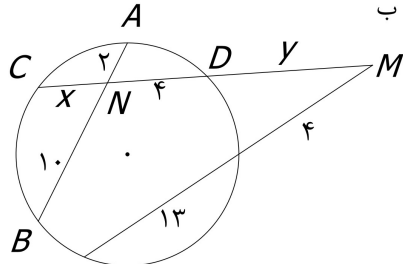
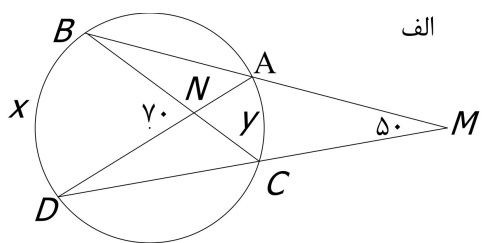
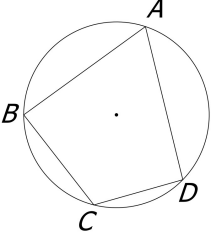
$$S = \frac{1}{2} ah_a \Rightarrow rP = \frac{1}{2} ah_a \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2rP} \quad (1) \quad (۰/۲۵)$$

$$\text{به طور مشابه } \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2rP}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2rP} \quad (2) \quad (۰/۲۵)$$

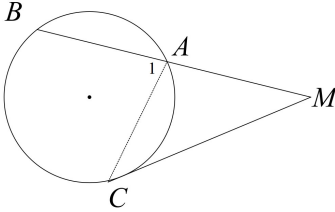
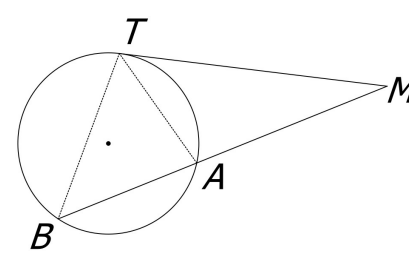
$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2rP} + \frac{b}{2rP} + \frac{c}{2rP} = \frac{2P}{2rP} = \frac{1}{r} \quad (۰/۲۵)$$

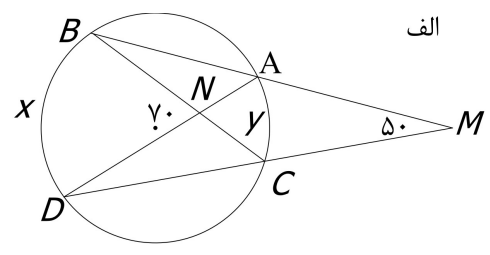
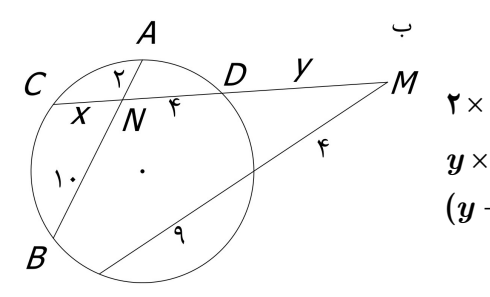
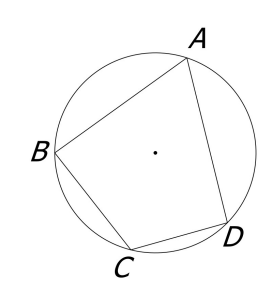
تمرین ۵ صفحه ۳۰

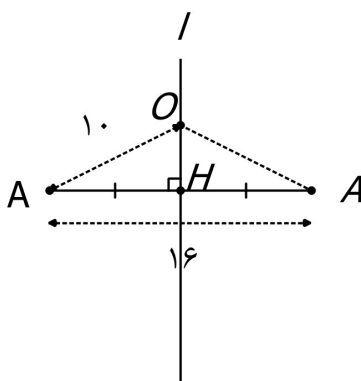
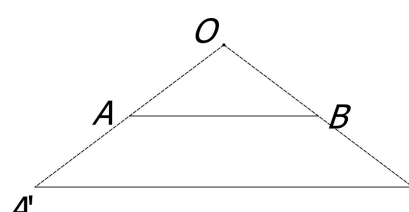
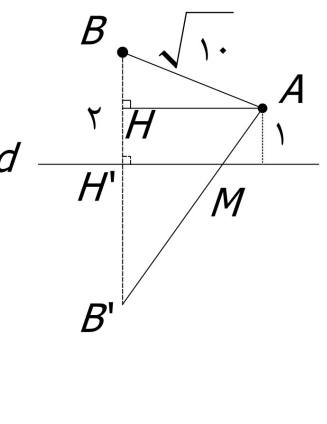
	الف) فرض کنیم $a = 6$ و $b = 10$ ، $c = 14$ ۱ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow 14^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos C \Rightarrow \cos C = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 120^\circ$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۶۵ ب) $P = \frac{6 + 10 + 14}{2} = 15 \quad (۰/۲۵)$ ۱/۵ $\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{15 \times 9 \times 5 \times 1} = 15\sqrt{3} \quad , \quad S = \frac{1}{2} \times 6 \times h_a = 15\sqrt{3} \Rightarrow h_a = 5\sqrt{3}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۵) (۰/۲۵) مشابه مثال صفحه ۷۱	۱۶
۱/۵	 $\frac{6}{10} = \frac{x}{14 - x} \Rightarrow 28 - 6x = 10x \Rightarrow x = 2 = AD \Rightarrow BD = 12$ (۰/۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵) $DC^2 = 6 \times 10 - 12 \times 2 = 36 \Rightarrow DC = 6$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) صفحه ۷۰	۱۷

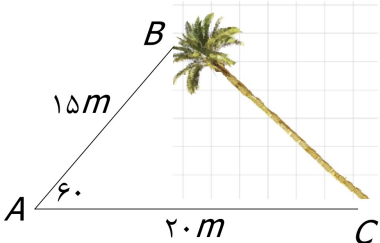
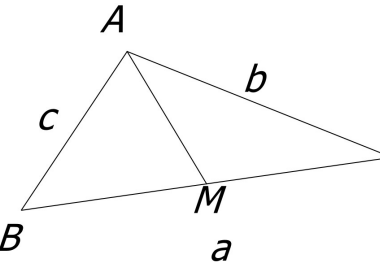
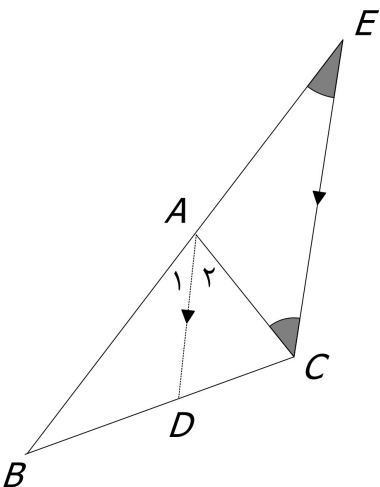
سؤالات آزمون درس : هندسه ۲		پایه: یازدهم		رشته: ریاضی و فیزیک		نوبت: خرداد - شهریور		شماره ۲	
ردیف	سؤالات پاسخ‌برگ دارد- استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.								
۱	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر AB, CD دو وتر دایره باشند که $AB > CD$ ، فاصله مرکز دایره تا AB از فاصله مرکز دایره تا CD است. ب) اگر $ OO' = R - R'$ آنگاه دو دایره هستند (مماس داخل - مماس خارج) پ) اگر مجموع معکوس شعاع های دایره های محاطی خارجی مثلثی $\frac{1}{6}$ باشد، شعاع دایره محاطی داخلی آن است.								
۲	در دایره مقابل ثابت کنید: $\widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AC}}{2}$								
۳	ثابت کنید اگر از نقطه M خارج دایره C ، بر دایره دو قاطع رسم کنیم، مربع اندازه مماس برابر حاصلضرب اندازه های دوقطعه قاطع است.								
۴	مقادیر مجهول را در هر مورد بیابید.  ب  الف								
۵	هر یک از چند ضلعی های سمت چپ را به ویژگی مربوط به آن در سمت راست وصل کنید: مستطیل ۱) کایت ۲) پنج ضلعی منتظم ۳) محاطی است ولی محیطی نیست (الف) نه محیطی است و نه محاطی (ب) هم محیطی است و هم محاطی (ج) محیطی است ولی محاطی نیست (د)								
۶	طول خط‌المركزین دو دایره مماس درونی ۲ سانتی متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها 16π سانتیمترمربع است. طول شعاع های دو دایره را به دست آورید.								
۷	ثابت کنید اگر چهارضلعی محاطی باشد آنگاه دو زاویه مقابل مکمل است. 								

۸	پاسخ کوتاه دهید. الف) در کدام تبدیل، تصویر تصویر هر نقطه، خود آن نقطه می شود؟ ب) در تبدیل دوران چه نقطه ای ثابت است؟ پ) به ازای چه مقادیری از بردار انتقال، انتقال تبدیل همانی می شود؟ ت) ترکیب دو تبدیل بازتاب با محورهای متقاطع، چه تبدیلی از شکل اولیه است؟ ث) با چه ضریب تجانس، تبدیل تجانس همانی خواهد بود؟ ج) مساحت هر شکل با مساحت مجانس آن چه رابطه ای دارند؟ چ) آیا در تجانس مستقیم جهت شکل حفظ می شود؟ ح) هرون به کمک کدام تبدیل دستور پیدا کردن کوتاه ترین مسیر را ارائه داد؟	۲
۹	نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر $AA' = ۱۶$ و نقطه O روی خط l و $OA = ۱۰$ باشد، فاصله نقطه A از خط OA' چقدر است؟	۱/۵
۱۰	اگر $A'B'$ تجانس پاره خط AB با ضریب تجانس $k > ۱$ باشد، ثابت کنید $A'B' = kAB$ می باشد؟ O $A \text{ ————— } B$	۱/۵
۱۱	دو نقطه A, B در یک سمت خط d و به ترتیب به فاصله ۱، ۲ از آن قرار دارند و نقطه M روی خط d قرار دارد. اگر $AB = \sqrt{۱۰}$ ، کمترین میرزان $AM + MB$ را بیابید.	۱
۱۲	یک درخت کج از نقطه A روی زمین، که در فاصله ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه ۶۰° دیده می شود. اگر فاصله A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، موارد زیر را بیابید: الف) طول درخت ب) سینوس زاویه ای که درخت با سطح زمین می سازد.	۱/۵
۱۳	در مثلث ABC ، $AB = ۴$ ، $AC = ۶$ ، $BC = ۸$ طول میانه AM را به دست آورید.	۱
۱۴	ثابت کنید در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت اندازه های ضلع های آن زاویه تقسیم می کند.	۱/۵
۱۵	در مثلث ABC داریم $AB = ۷$ ، $AC = ۴$ و $BC = ۱۰$. طول نیمساز زاویه داخلی C را به دست آورید.	۱
۱۶	در مثلثی با اضلاع ۷، ۵، ۳ مساحت مثلث را بیابید.	۱
۲۰	موفق باشید	جمع

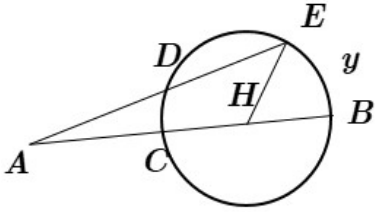
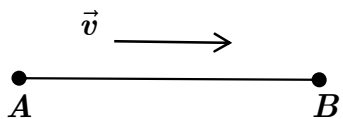
شماره ۲	نوبت: خرداد - شهریور	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: یازدهم	راهنمای نمره گذاری آزمون درس: هندسه ۲
نمره	راهنمای نمره گذاری			ردیف
۰/۷۵	الف) کمتر (۰,۲۵) ب) مماس داخل (۰,۲۵) پ) ۶ (۰,۲۵)			۱
۱	از نقطه A خطی به C وصل می کنیم. زاویه $\widehat{MAC}$ برای مثلث MAC یک زاویه خارجی محسوب می شود (۰,۲۵) پس:  $\widehat{A_1} = \widehat{M} + \widehat{C} \rightarrow \widehat{M} = \widehat{A_1} - \widehat{C} \quad (۰,۲۵)$ زاویه $\widehat{C}$ یک زاویه ظلّی و A_1 یک زاویه محاطی است پس $\widehat{A_1} = \frac{\widehat{BC}}{۲}, \quad \widehat{C} = \frac{\widehat{AC}}{۲} \quad (۰,۲۵)$ با جایگذاری رابطه های بالا در قبل داریم $\widehat{M} = \widehat{A_1} - \widehat{C} = \frac{\widehat{BC}}{۲} - \frac{\widehat{AC}}{۲} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AC}}{۲} \quad (۰,۲۵)$			۲
۱/۵	رسم شکل (۰,۲۵) از T به A و B وصل کنید (۰,۲۵) $\begin{cases} T = B = \frac{AT}{۲} \quad (۰,۲۵) \\ M = M \quad (۰,۲۵) \end{cases} \rightarrow (۰,۲۵) MTA \sim MBT \rightarrow \frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT} \rightarrow MT^2 = MA \times MB$ 			۳

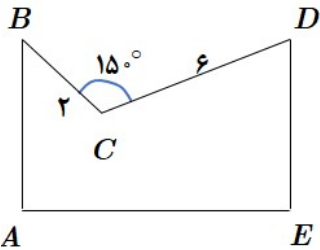
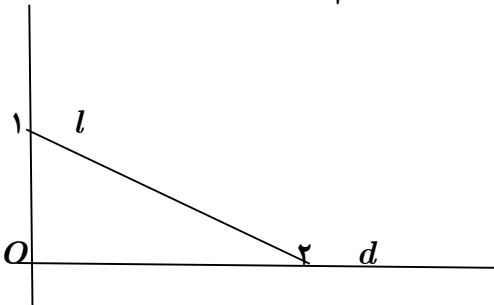
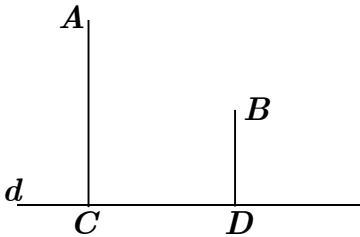
۲	 الف $\begin{cases} 50 = \frac{x-y}{2} \rightarrow x-y = 100 \quad (0.25) \\ 70 = \frac{x+y}{2} \rightarrow x+y = 140 \quad (0.25) \end{cases} \rightarrow 2x = 240$ $\rightarrow x = 120(0.25), y = 20(0.25)$	۴
۱	 ب $2 \times 10 = x \times 4(0.25) \rightarrow x = 5(0.25)$ $y \times (y+9) = 4 \times 13(0.25) \rightarrow y^2 + 9y - 52 =$ $(y-4)(y+13) = 0 \rightarrow y = 4(0.25)$	۵
۰/۷۵	(۰,۲۵) الف (۱) (۰,۲۵) د (۲) (۰,۲۵) ج (۳)	۵
۱	$d = R - R' = 2(0.25)$ $16\pi = \pi R^2 - \pi R'^2 \rightarrow R^2 - R'^2 = 16 \rightarrow \underbrace{(R - R')}_2 (R + R') = 16(0.25)$ $\begin{cases} R + R' = 8 \\ R - R' = 2 \end{cases} (0.25) \rightarrow 2R = 10 \rightarrow R = 5, R' = 3(0.25)$	۶
۱	 $\begin{cases} \widehat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} \\ \widehat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2} \end{cases} (0.25) \rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = 180(0.25)$ $\begin{cases} \widehat{B} = \frac{\widehat{ADC}}{2} \\ \widehat{D} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \end{cases} (0.25) \rightarrow \widehat{B} + \widehat{D} = \frac{\widehat{ADC} + \widehat{ABC}}{2} = 180(0.25)$	۷
۲	(الف) بازتاب (۰,۲۵) (ب) مرکز دوران (۰,۲۵) (پ) $\vec{V} = 0$ (۰,۲۵) (ت) دوران (۰,۲۵) (ث) ضریب تجانس (۰,۲۵) (ج) مساحت تصویر = مساحت شکل اولیه در مجذور ضریب تجانس (۰,۲۵) (چ) بله (۰,۲۵) (ح) بازتاب (۰,۲۵)	۸

	بازتاب تبدیل طول پاست است  $\begin{cases} AH = A'H = 8 \\ OA' = OA = 10 \end{cases} \quad (0.25)$ AOH قائم الزاویه پس طبق فیثاغورس $OH = 6 \quad (0.5)$ $S_{OAA'} = \frac{1}{2} \times OH \times AA' = 48 \quad (0.25)$ $S_{OAA'} = \frac{1}{2} \times AH' \times OA' \quad (0.25) \rightarrow 48 = \frac{1}{2} \times AH' \times 10 \rightarrow$ $AH' = \frac{48}{5} \quad (0.25)$	۹
۱/۵	 $A'O = kAO \quad (0.25), B'O = kBO \quad (0.25) \rightarrow$ $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{1}{k} \quad (0.25) \rightarrow AB \parallel A'B' \quad (0.25)$ $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{1}{k} = \frac{AB}{A'B'} \quad (0.25) \rightarrow A'B' = kAB \quad (0.25)$	۱۰
۱	طبق قضیه هرون کوتاه ترین مسیر $B'MA$ است که در آن B' تصویر B است (0.5)  $HH' = 1 \rightarrow BH = 1$ $AB^2 = AH^2 + BH^2 \rightarrow 10 = AH^2 + 1$ $\rightarrow AH = 3 \quad (0.25)$ $AB'^2 = AH^2 + B'H^2 \rightarrow AB'^2 = 9 + 9$ $\rightarrow AB' = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad (0.25)$	۱۱

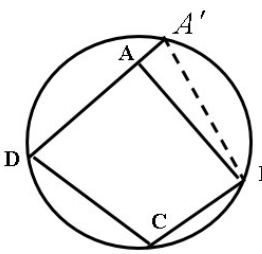
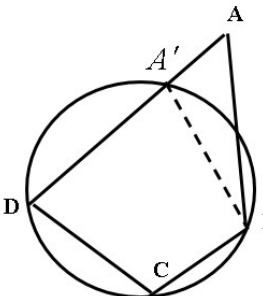
۱۲	الف) طبق قضیه کسینوس ها (۰,۲۵)  $x^2 = 20^2 + 15^2 - 2 \times 20 \times 15 \times \cos(60^\circ) \quad (۰,۲۵)$ $x = \sqrt{325} = 5\sqrt{13} \quad (۰,۲۵)$ ب) طبق قضیه سینوس ها (۰,۲۵) $\frac{15}{\sin C} = \frac{5\sqrt{13}}{\sin 60^\circ} \quad (۰,۲۵) \rightarrow \sin C = \frac{3\sqrt{39}}{26} \quad (۰,۲۵)$	۱/۵
۱۳	 $b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (۰,۲۵) \rightarrow$ $6^2 + 4^2 = 2AM^2 + \frac{8^2}{2} \quad (۰,۲۵) \rightarrow$ $AM^2 = 10 \quad (۰,۲۵) \rightarrow$ $AM = \sqrt{10} \quad (۰,۲۵)$	۱
۱۴	مطابق شکل از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند. (۰,۲۵)  $\begin{cases} AD \parallel EC \rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{E} \\ AD \parallel EC \rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{C} \end{cases} \quad (۰,۲۵) \rightarrow \widehat{E} = \widehat{C} \quad (۰,۲۵)$ ACE متساوی الساقین پس AC = AE (۰,۲۵) حال داریم $AD \parallel CE \rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} \quad (۰,۲۵) \rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \quad (۰,۲۵)$	۱/۵
۱۵	طبق قضیه نیم ساز داریم $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD} \quad (۰,۲۵) \rightarrow \frac{10}{4} = \frac{BD}{AD} \rightarrow \frac{10}{4+10} = \frac{BD}{AD+BD}$ $\frac{10}{14} = \frac{BD}{7} \rightarrow BD = 5 \rightarrow AD = 2 \quad (۰,۲۵)$ حال طبق قضیه دوم نیم سازها داریم $CD^2 = AC \times BC - AD \times BD \quad (۰,۲۵) = 40 - 10 = 30 \rightarrow$ $CD = \sqrt{30} \quad (۰,۲۵)$	۱

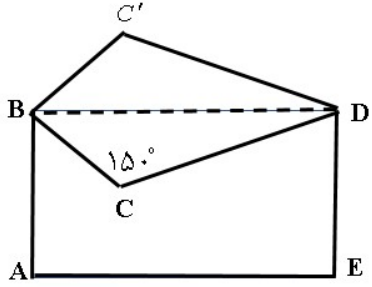
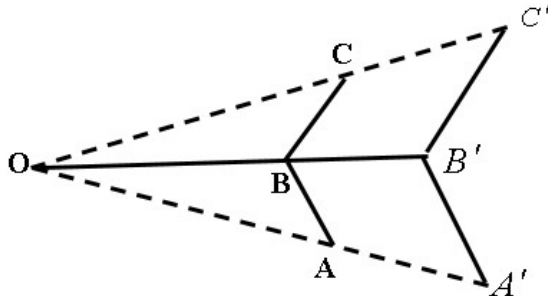
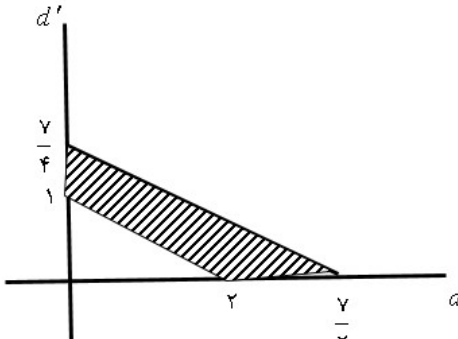
۱	${}_2P = 3 + 5 + 7(0.25) \rightarrow P = \frac{15}{2}(0.25)$ و داریم $S = \sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2} - 3\right)\left(\frac{15}{2} - 5\right)\left(\frac{15}{2} - 7\right)(0.25)} = \sqrt{\frac{3 \times 5 \times 3 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 2}} = \frac{15\sqrt{3}}{4}(0.25)$	۱۶
سپاس و خداقوت خدمت همکار گرامی		

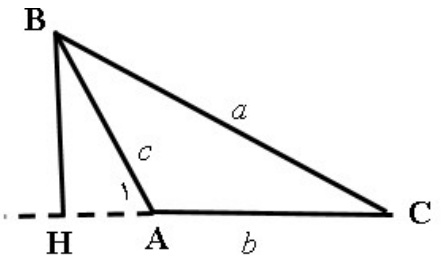
سؤالات آزمون درس : هندسه ۲	پایه: یازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: خرداد - شهریور	شماره ۳
ردیف	سؤالات پاسخ برگ دارد- استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید. الف) یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین لزوماً محاطی است. ب) دو دایره مماس خارج فقط یک مماس مشترک خارجی دارند. ج) هر تبدیل هندسی طولیاً لزوماً جهت شکل را حفظ می‌کند. د) نسبت هر ضلع به سینوس زاویه مقابل به آن ضلع برابر شعاع دایره محیطی مثلث است.			۱
۲	در هر قسمت پاسخ مناسب را بنویسید. الف) دو دایره متقاطع مماس مشترک ندارند. ب) یک چندضلعی محاطی است اگر و تنها اگر آن در یک نقطه هم‌رس باشند. ج) اضلاع متوازی‌الاضلاعی ۴ و ۵ واحد و یکی از زوایای آن 60° است. مساحت متوازی‌الاضلاع است. د) هرگاه به ازای هر نقطه‌ی A از صفحه داشته باشیم $T(A) = A$، تبدیل T را تبدیل گوییم.			۱
۳	ثابت کنید: اندازه زاویه ظلّی $\hat{M}$ ، برابر نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه است.			۱/۲۵
۴	در شکل روبرو داریم، $\hat{A} = 17^\circ$ و $\hat{E} = 31^\circ$ و H وسط قطر BC است. کمان کوچکتر CD چند درجه است؟ 			۱
۵	از نقطه P خارج دایره، مماس PT و قاطعی نسبت به دایره رسم می‌کنیم، خط قاطع دایره را در نقاط A و B قطع می‌کند. ثابت کنید: $PT^2 = PA \times PB$			۱/۲۵
۶	فاصله بین مرکزهای دو دایره مماس درون ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آن‌ها 16π سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره کوچک چندبرابر شعاع دایره بزرگ است؟			۱/۵
۷	شعاع دایره محاطی بیرونی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $2\sqrt{3}$ برابر کدام است؟ الف) ۵/۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴			۰/۵
۸	ثابت کنید: اگر دو زاویه مقابل در یک چهارضلعی مکمل باشند، چهارضلعی محاطی است.			۱/۵
۹	مطابق شکل زیر، پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی است. ثابت کنید تحت انتقال بردار $\vec{v}$، اندازه پاره خط AB و تصویرش با هم برابر است. 			۱

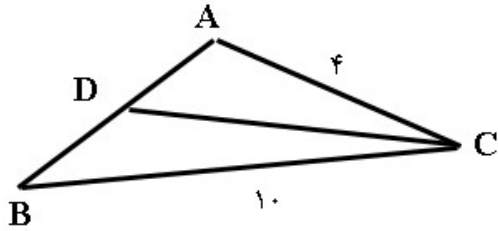
۱۰	در شکل زیر، می‌خواهیم بدون تغییر طول ضلع s، مساحت شکل را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت را به‌دست آورید. ($\hat{BCD} = 15^\circ$ و $BC = 2$ و $CD = 6$) 
۱۱	ثابت کنید، در حالت $k > 0$، تجانس اندازه زاویه را حفظ می‌کند
۱۲	در شکل روبرو اگر خط l را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{7}{4}$ تصویر کنیم و آن را l' بنامیم، مساحت بین خط l و l' و خطوط d و d' چقدر است؟ 
۱۳	در شکل مقابل داریم $CD = 5$، $AC = 8$ و $BD = 4$. از نقطه A به خط d و از آنجا به نقطه B می‌رویم. طول کوتاه‌ترین مسیر را پیدا کنید. 
۱۴	در مثلث ABC، $\hat{C} = 48^\circ$، $\hat{B} = 72^\circ$ و $BC = \sqrt{3}$ است. شعاع دایره محیطی این مثلث را به‌دست آورید.
۱۵	در مثلثی به طول اضلاع $\sqrt{2}$، ۳ و ۴ واحد، طول بلندترین میانه را به‌دست آورید.
۱۶	در مثلث ABC که $(\hat{A} > 90^\circ)$، ثابت کنید $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.
۱۷	در مثلث ABC داریم، $AB = 7$، $AC = 4$ و $BC = 10$ است. طول نیمساز زاویه داخلی C را به‌دست آورید.
۲۰	موفق باشید جمع

شماره ۳	نوبت: خرداد - شهریور	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: یازدهم	راهنمای نمره گذاری آزمون درس: هندسه ۲
نمره	راهنمای نمره گذاری			ردیف
۱	(الف درست (۰/۲۵) (ب نادرست (۰/۲۵) (ج نادرست (۰/۲۵) (د نادرست (۰/۲۵)			۱
۱	(الف داخلی (۰/۲۵) (ب عمود منصف های اضلاع (۰/۲۵) (ج (۰/۲۵) (د همانی (۰/۲۵)			۲
۱/۲۵	$\widehat{AMD} = 90^\circ = \frac{1}{2} \widehat{MBD} \quad (0/25)$ $\widehat{BMD} = \frac{1}{2} \widehat{BD} \quad (0/25)$ $\widehat{AMB} = \widehat{AMD} - \widehat{BMD} \quad (0/25)$ $= \frac{1}{2} (\widehat{MD} - \widehat{BD}) = \frac{1}{2} \widehat{MB} \quad (0/25)$ (۰/۲۵)			۳
۱	$BE = y \quad CD = x \quad E = 31^\circ, \quad A = 17^\circ$ $\frac{y-x}{2} = 17^\circ \rightarrow y-x = 34^\circ \quad (0/25)$ $\triangle AOE \quad \widehat{BHE} = 17^\circ + 31^\circ = 48^\circ \rightarrow y = 48^\circ \quad (0/25)$ $\left. \begin{array}{l} \frac{y-x}{2} = 17^\circ \rightarrow y-x = 34^\circ \\ \widehat{BHE} = 48^\circ \rightarrow y = 48^\circ \end{array} \right\} \rightarrow x = 14^\circ \quad (0/25)$			۴
۱/۲۵	$\widehat{P} = \widehat{P} \quad (0/25)$ $\widehat{T_1} = \widehat{B} = \frac{\widehat{AT}}{2} \quad (0/25)$ $\Rightarrow \frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT} \Rightarrow PT^2 = PA \times PB \quad (0/25)$			۵

۱/۵	$d = r_p - r_1 = 2 \text{ cm} \quad (0/25)$ $S_p - S_1 = 16\pi \quad (0/25) \rightarrow \pi(r_p^2 - r_1^2) = 16\pi \quad (0/25) \rightarrow (r_p - r_1)(r_p + r_1) = 16 \rightarrow r_p + r_1 = 8$ $\left. \begin{matrix} r_p - r_1 = 2 \\ r_p + r_1 = 8 \end{matrix} \right\} (0/25) \Rightarrow r_p = 5, r_1 = 3 \quad (0/5) \rightarrow \frac{r_1}{r_p} = \frac{3}{5} = 0/6 \quad (0/25)$	۶
۰/۵	گزینه ج	۷
۱/۵	فرض: $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ چهارضلعی محاطی: حکم   (۰/۲۵) می دانیم از هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست یک دایره می گذرد. حال نشان می دهیم دایره ای که از نقاط B, C, D میگذرد؛ از نقطه A نیز می گذرد. (۰/۲۵) اگر این دایره از راس A نگذرد (برهان خلف) نقطه ی برخورد AD یا امتداد آن با دایره را A' می نامیم و از نقطه A' به B وصل می کنیم (۰/۲۵) چهارضلعی $A'BCD$ محاطی است پس: $\hat{A}' + \hat{C} = 180^\circ$ از طرفی طبق فرض داشتیم: $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ لذا $\hat{A} = \hat{A}'$ (۰/۲۵) و چون A زاویه خارجی برای مثلث ABA' بنابراین $\hat{A} > \hat{A}'$ و این با نتیجه فوق متناقض است. لذا دایره از راس A می گذرد (۰/۲۵)	۸
۱	 (۰/۲۵) $\left. \begin{matrix} AB = AA' + A'B \\ A'B' = A'B + BB' \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB = A'B' \quad (0/25)$ طبق تعریف انتقال $AA' = BB'$ (۰/۵)	۹

۱	 $S_{BCDC'} = 2S_{BCD} = 2\left(\frac{1}{2} BC \times CD \cdot \sin C\right) = 2 \times 6 \times \frac{1}{2} = 6$ (۰ / ۲۵) (۰ / ۲۵) (۰ / ۲۵)	۱۰
۱/۲۵	می دانیم تجانس شیب را حفظ می کند.  (۰ / ۲۵) $\left. \begin{array}{l} BC \parallel B'C' , \quad \overset{\text{مورب}}{OB'} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}'_1 \\ AB \parallel A'B' , \quad \overset{\text{مورب}}{OB'} \Rightarrow \hat{B}_r = \hat{B}'_r \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{B}_r = \hat{B}'_1 + \hat{B}'_r \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}'$ (۰ / ۲۵) (۰ / ۲۵)	۱۱
۱/۵	 (۰ / ۲۵) $\frac{OA'}{OA} = \frac{5}{4} \rightarrow OA' = \frac{5}{4} \quad (۰ / ۵)$ $\frac{OB'}{OB} = \frac{5}{4} \rightarrow OB' = \frac{5}{2}$ $S_r - S_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} \times \frac{5}{2} \right) - \frac{1}{2} (1 \times 2) = \frac{49}{16} - 1 = \frac{33}{16}$ (۰ / ۲۵) (۰ / ۲۵) (۰ / ۲۵)	۱۲

٠/٧٥	$\text{طول کوتاهترین} = \sqrt{٥^2 + (٨ + ٤)^2} = \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = ١٣$ (٠ / ٢٥) (٠ / ٢٥)	١٣
١	$\hat{A} = ١٨^\circ - (٧٢^\circ + ٤٨^\circ) = ٦^\circ \quad (٠ / ٢٥)$ $\frac{BC}{\sin A} = ٢R \rightarrow \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = ٢R \rightarrow R = ١$ (٠ / ٢٥) (٠ / ٢٥) (٠ / ٢٥)	١٤
١	$b^2 + c^2 = ٢AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (٠ / ٢٥)$ $٩ + ١٦ = ٢AM^2 + \frac{2}{2} \rightarrow ٢AM^2 = ٢٤ \rightarrow AM^2 = ١٢ \rightarrow Am = \sqrt{١٢}$ (٠ / ٢٥) (٠ / ٢٥) (٠ / ٢٥)	١٥
١/٧٥	 (٠ / ٢٥) $\cos A_1 = \frac{AH}{c} \rightarrow AH = c \cdot \cos A_1 \quad (٠ / ٢٥)$ $\sin A_1 = \frac{BC}{c} \rightarrow BC = c \cdot \sin A_1 \quad (٠ / ٢٥)$ $a^2 = CH^2 + BH^2$ $= (AH + AC)^2 + BH^2 \quad (٠ / ٢٥)$ $= (c \cdot \cos A_1 + b)^2 + (c \cdot \sin A_1)^2$ $= c^2 \cos^2 A_1 + b^2 + ٢bc \cos A_1 + c^2 \sin^2 A_1 \quad (٠ / ٢٥)$ $= b^2 + c^2 (\cos^2 A_1 + \sin^2 A_1) + ٢bc \cos(١٨^\circ - A) \quad (٠ / ٢٥)$ $= b^2 + c^2 - ٢bc \cos A \quad (٠ / ٢٥)$	١٦



۱/۷۵

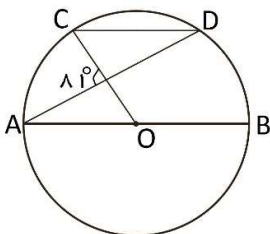
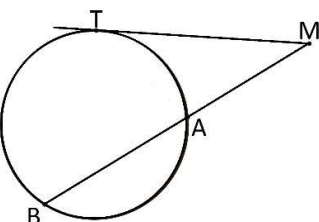
قضیه نیمساز $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \rightarrow \frac{AC}{AC+BC} = \frac{AD}{AD+BD} \rightarrow \frac{۴}{۱۴} = \frac{AD}{۷} \rightarrow AD = ۲$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

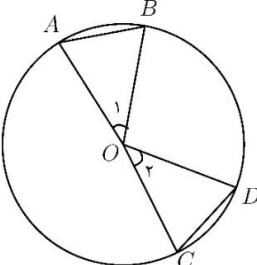
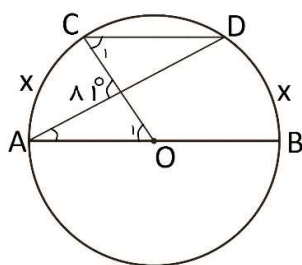
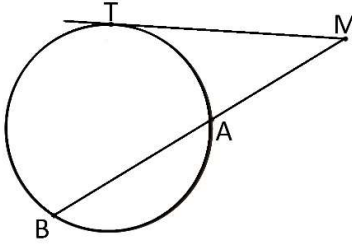
$CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD = ۴۰ - ۱۰ = ۳۰ \rightarrow CD = \sqrt{۳۰}$ طول نیمساز

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)

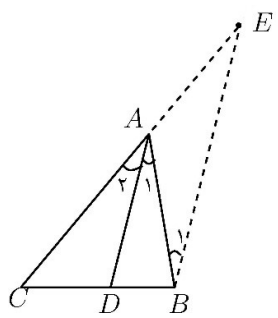
سپاس و خداقوت خدمت همکار گرامی

سؤالات آزمون درس : هندسه ۲	پایه: یازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: خرداد - شهریور	شماره ۴
ردیف	سؤالات پاسخ‌برگ دارد- استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. (الف) اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف کمان روبه‌رو به آن است. (ب) دو دایره متداخل دو مماس مشترک دارند. (ج) دوران، تبدیلی طولپاست. (د) هر نقطه روی محور بازتاب، نقطه ثابت تبدیل است.			
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (الف) انتقال، شیب خط را حفظ (می‌کند - نمی‌کند) (ب) در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به آن ضلع، برابر با اندازه دایره محیطی مثلث است. (شعاع - قطر) (ج) با توجه به قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC، اگر آنگاه $a^2 > b^2 + c^2$. $(\angle A > 90^\circ - \angle A < 90^\circ)$			
۳	در هر قسمت، گزینه مناسب را انتخاب کنید. (الف) اگر در تجانسی با نسبت k، داشته باشیم ، آنگاه تجانس معکوس است و شکل کوچک‌تر می‌شود. (۱) $k > 1$ (۲) $0 < k < 1$ (۳) $k < -1$ (۴) $-1 < k < 0$ (ب) کدام تبدیل، جهت شکل را حفظ نمی‌کند؟ (۱) بازتاب (۲) انتقال (۳) دوران (۴) تجانس (ج) کدام تبدیل، اندازه زاویه را حفظ نمی‌کند؟ (۱) بازتاب (۲) انتقال (۳) دوران (۴) تجانس			
۴	ثابت کنید اگر دو وتر از یک دایره با هم برابر باشند، اندازه کمان‌های متناظر آن‌ها نیز با هم برابر است.			
۵	در شکل مقابل، $AB \parallel CD$. اندازه کمان CD را به دست آورید. 			
۶	ثابت کنید هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازه مماس برابر با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه قاطع است. 			
۷	طول مماس مشترک دو دایره مماس بیرون، برابر $4\sqrt{2}$ و طول خط‌المركزین آن‌ها ۶ است. شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.			
۸	شعاع دایره محاطی داخلی یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمه ۸ و ۱۵ را به دست آورید.			

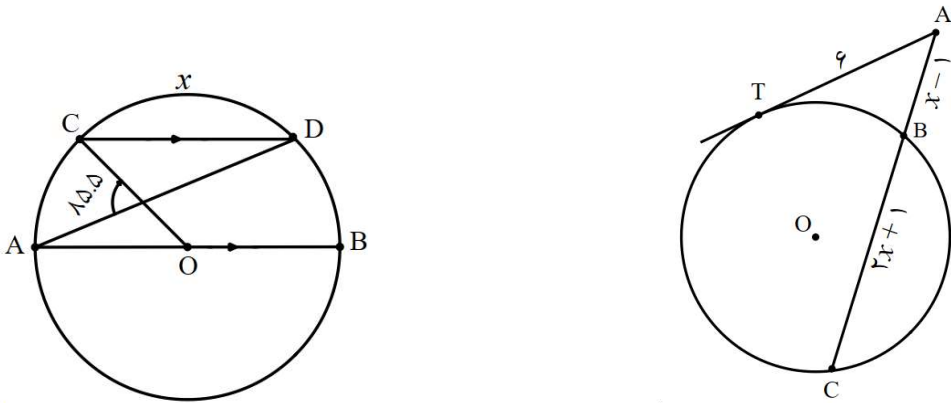
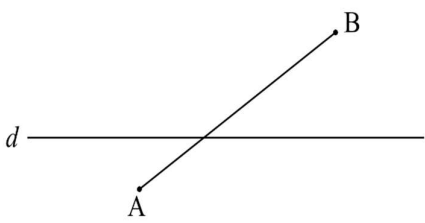
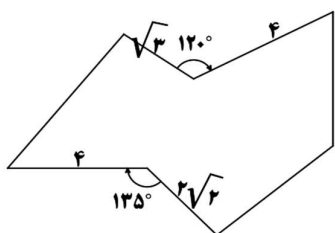
۹	ثابت کنید هر دوزنقه متساوی الساقین، محاطی است.	۱
۱۰	اگر بازتاب نقطه $A(-۲.۲)$ نسبت به خط d برابر با $A'(۰.۳)$ باشد، شیب خط d را به دست آورید.	۱
۱۱	پاره خط AB را مطابق شکل زیر با زاویه α نسبت به نقطه O دوران داده‌ایم تا پاره خط $A'B'$ به دست آید. ثابت کنید $AB = A'B'$.	۱/۲۵
۱۲	یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس ۳ و به مرکز محلی تلاقی قطرهای تصویر کرده‌ایم. اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۳۲ باشد، آنگاه طول محیط مربع اولیه را محاسبه کنید. (رسم شکل الزامی است).	۱/۲۵
۱۳	زمینی به شکل زیر داریم، می‌خواهیم بدون آنکه محیط این زمین تغییر کند مساحتش را افزایش دهیم. با رسم شکل مناسب میزان افزایش مساحت را حساب کنید. ($AB = ۳$ $BC = ۴\sqrt{۲}$ $\angle ABC = ۱۳۵^\circ$)	۱
۱۴	ثابت کنید در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.	۲/۲۵
۱۵	در شکل مقابل داریم $AE = AD = DE = ۱$ و $DB = ۷$ ، $EC = ۵$. الف) مساحت چهارضلعی $BCED$ را به دست آورید. ب) طول ضلع BC را به دست آورید.	۲
۱۶	مثلث با اضلاع ۱۳، ۱۴ و ۱۵ را در نظر بگیرید. الف) مساحت این مثلث را به دست آورید. ب) طول بزرگ‌ترین ارتفاع آن را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۲۰	جمع	موفق باشید

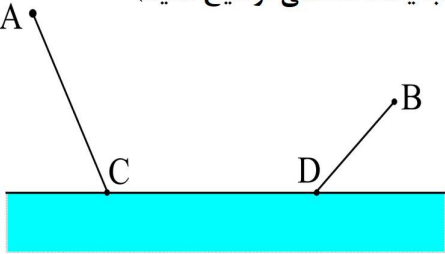
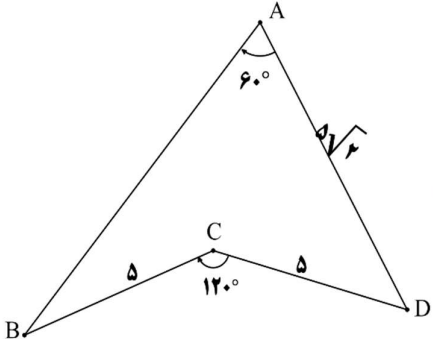
شماره ۴	نوبت: خرداد - شهریور	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: یازدهم	راهنمای نمره گذاری آزمون درس: هندسه ۲
نمره	راهنمای نمره گذاری			ردیف
۱	(الف) درست (ب) نادرست (ج) درست (د) نادرست (هر مورد ۰/۲۵ نمره)			۱
۰/۷۵	(الف) می کند (ب) قطر (ج) $\angle A > 90^\circ$ (هر مورد ۰/۲۵ نمره)			۲
۰/۷۵	(الف) گزینه ۴ (ب) گزینه ۱ (ج) گزینه ۴ (هر مورد ۰/۲۵ نمره)			۳
۱/۲۵	 فرض: $AB = CD$ حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ (رسم شکل ۰/۲۵ نمره) $\underbrace{\left. \begin{array}{l} OA = OD \text{ شعاع} \\ OB = OC \text{ شعاع} \\ AB = CD \text{ فرض} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{ضرض}} \triangle AOB \cong \triangle DOC \xRightarrow{\text{اجزا متناظر}} \underbrace{\angle O_1 = \angle O_2}_{\text{نمره } 0/25} \xRightarrow{\text{زاویه روبرو به کمان مرکزی}} \underbrace{\widehat{AB} = \widehat{CD}}_{\text{نمره } 0/25}}$ نمره ۰/۵			۴
۱/۵	$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = x$ (نمره ۰/۲۵) $\underbrace{\angle O_1 = x}_{\text{نمره } 0/25} \cdot \underbrace{\angle A = \frac{x}{2}}_{\text{نمره } 0/25} = \text{زاویه خارجی مثلث} \Rightarrow 81 = \frac{3x}{2}$ (نمره ۰/۲۵) $\Rightarrow \underbrace{x = 54}_{\text{نمره } 0/25} \Rightarrow \underbrace{\widehat{CD} = 72}_{\text{نمره } 0/25}$ 			۵
۱/۲۵	 فرض: TM مماس بر دایره است و BM قاطع دایره است. حکم: $TM^2 = AM \cdot BM$ از T به A و B وصل می کنیم. (یا روی شکل نشان داده شود). (نمره ۰/۲۵) $\underbrace{\left. \begin{array}{l} \angle M \text{ مشترک} \\ \angle B = \angle T = \frac{\widehat{AT}}{2} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{ز}} \triangle ATM \sim \triangle BTM \xRightarrow{\text{اضلاع متناسب}} \underbrace{\frac{AM}{TM} = \frac{TM}{BM} = \frac{AT}{BT}}_{\text{نمره } 0/25} \Rightarrow \underbrace{TM^2 = AM \cdot BM}_{\text{نمره } 0/25}}$ نمره ۰/۵ (نوشتن دو کسر اول کافی است)			۶
۱/۲۵	$d = 6 \rightarrow R + R' = 6$ (نمره ۰/۲۵) $\rightarrow R' = 6 - R$ (*) $T = 2\sqrt{RR'} = 4\sqrt{2}$ (نمره ۰/۲۵) $\rightarrow RR' = 8$ (**) (*). (**) $\rightarrow (6 - R)R = 8 \rightarrow 6R - R^2 - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} R = 2 \rightarrow R' = 4 \\ R = 4 \rightarrow R' = 2 \end{cases}$ (تشکیل و حل معادله ۰/۷۵ نمره)			۷

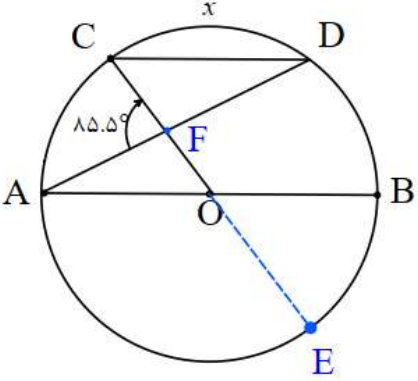
۱/۲۵	$r = \frac{S}{P}$ (نمره ۰/۲۵) $۱۷^۲ + ۱۵^۲ = ۱۷^۲ \rightarrow \text{وتر} = ۱۷ \rightarrow \begin{cases} ۲P = ۸ + ۱۷ + ۱۵ = ۴۰ \rightarrow P = ۲۰ & \text{(نمره ۰/۲۵)} \\ S = \frac{۸ \times ۱۵}{۲} = ۶۰ & \text{(نمره ۰/۲۵)} \end{cases} \rightarrow r = \frac{۶۰}{۲۰} = ۳$ (نمره ۰/۲۵)	۸
۱	فرض: دوزنقه $ABCD$ متساوی الساقین است. حکم: دوزنقه $ABCD$ محاطی است. می دانیم یک چهارضلعی محاطی است اگر و تنها اگر زوایای روبرو مکمل باشند. (نمره ۰/۲۵) پس کافی است ثابت کنیم زوایای روبرو مکمل هم هستند. از فرض داریم $\angle A = \angle B$ و $\angle C = \angle D$. (نمره ۰/۲۵) از طرفی مجموع زوایای داخلی چهارضلعی ۳۶۰° است پس داریم: $۳۶۰^\circ = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = ۲\angle A + ۲\angle C$ (نمره ۰/۲۵) $\rightarrow \angle A + \angle C = ۱۸۰^\circ$. $\angle B + \angle D = ۱۸۰^\circ \rightarrow$ زوایای روبرو مکمل هستند (نمره ۰/۲۵)	۹
۱	$d \perp AA' \rightarrow m_d = \frac{-1}{m_{AA'}}$ (نمره ۰/۲۵) $m_{AA'} = \frac{۳-۲}{۰-(-۲)} = \frac{۱}{۲} \rightarrow m_d = -۲$ (نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۵)	۱۰
۱/۲۵	$\left. \begin{matrix} \angle O_1 + \angle O_2 = \alpha \\ \angle O_2 + \angle O_3 = \alpha \end{matrix} \right\} \rightarrow \angle O_1 = \angle O_3$ (۱) (نمره ۰/۵) $\left. \begin{matrix} \angle O_1 = \angle O_3 \\ OA = OA' \\ OB = OB' \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{ض.ض.}} \triangle AOB \cong \triangle A'OB' \xrightarrow{\text{اجزا متناظر}} \underline{AB = A'B'}$ (نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۵)	۱۱
۱/۲۵	باتوجه به ویژگی تجانس می دانیم نسبت مساحت ها برابر است با توان دوم نسبت تجانس. (نمره ۰/۲۵). پس اگر قرار دهیم $AB = x$ آنگاه $\left. \begin{matrix} S_{ABCD} = x^۲ \\ S_{A'B'C'D'} = ۹x^۲ \end{matrix} \right\} \rightarrow ۹x^۲ - x^۲ = ۳۲ \rightarrow ۸x^۲ = ۳۲ \rightarrow x = ۲$ (نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵) و بنابراین ۸ = محیط. (نمره ۰/۲۵) (نمره ۰/۲۵)	۱۲
۱	ابتدا بازتاب B را نسبت به ضلع AC پیدا کرده و آن را B' می نامیم. سپس B' را به A و C وصل می کنیم. بنابراین افزایش مساحت برابر است با: $S_{\text{افزاده شده}} = ۲ \times S_{ABC} = ۲ \times \left(\frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \right) = ۱۲$ (نمره ۰/۲۵) (رسم شکل ۰/۲۵)	۱۳

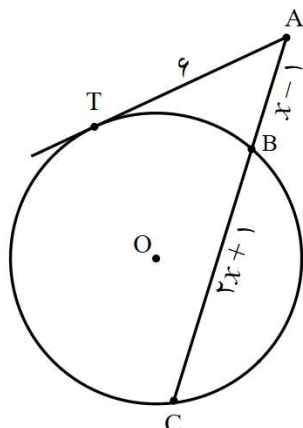
۲/۲۵	۱۴ فرض: AD نیمساز زاویه A است. حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ از B به موازات AD خطی رسم می‌کنیم تا امتداد AC را در نقطه E قطع کند. (رسم شکل ۲۵/۵ نمرة)  (۲۵/۵ نمرة) (۲۵/۵ نمرة) $EB \parallel AD \rightarrow \angle B_1 = \angle A_1$ (مورب و AB) $EB \parallel AD \rightarrow \angle E = \angle A_2$ (مورب و AE) $\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle A_2 \\ \angle B_1 = \angle E \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \angle B_1 = \angle E \rightarrow \text{متساوی الساقین است } ABE \rightarrow AE = AB (*)$ (۵/۵ نمرة) $AD \parallel EB \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \triangle ACD \sim \triangle ECB \rightarrow \frac{AC}{EA} = \frac{DC}{DB} \rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB}$ (۲۵/۵ نمرة)
۲	۱۵ الف) $\angle A = 60^\circ \rightarrow \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ (۵/۵ نمرة) $ADE \rightarrow S_{ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲۵/۵ نمرة) مثلث متساوی الاضلاع $\rightarrow S_{BCED} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲۵/۵ نمرة) ب) از قضیه کسینوس‌ها داریم: $BC^2 = 64 + 36 - \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 52 \rightarrow BC = \sqrt{52}$ (۲۵/۵ نمرة)
۱/۲۵	۱۶ الف) $S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ (۲۵/۵ نمرة) $P = \frac{13+14+15}{2} = 21 \rightarrow S = \sqrt{21(8)(7)(6)} = 84$ (۲۵/۵ نمرة) ب) نوشتن و محاسبه فرمول زیر (۲۵/۵ نمرة) و قرار دادن ضلع به اندازه ۱۳ در آن (۲۵/۵ نمرة) $h_1 = \frac{2S}{\text{ضلع نظیر}} = \frac{2 \times 84}{13} = \frac{168}{13}$

سؤالات آزمون درس : هندسه ۲	پایه: یازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: خرداد - شهریور	شماره ۵
ردیف	سؤالات پاسخ برگ دارد- استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			نمره
۱	درستی و یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ برابر 60° باشد، طول کمان قطاع، $\frac{1}{3}$ کل دایره است. ب) در هر بازتاب تبدیل یافته یک مثلث، یک مثلث است که با مثلث اولیه متشابه است. پ) مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.			۰/۷۵
۲	جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید. الف) دو دایره $C(O, 9)$، $C'(O', 4)$ مماس برون اند، طول مماس مشترک خارجی این دو دایره برابر است. ب) اگر در مثلث ABC داشته باشیم $BC = 9$، $AC = 4$، $AB = 8$، آنگاه زاویه A، یک زاویه است.			۰/۵
۳	گزینه مناسب را انتخاب کنید. الف) در دایره $C(O, R)$، $\widehat{AB} = 300^\circ$ و $AB = 10$، فاصله O از وتر AB برابر است با: ① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $5\sqrt{3}$ ④ $5\sqrt{2}$ ب) دایره $C(O, R)$ و نقطه M روی این دایره واقع شده است. مجانس این دایره را نسبت به نقطه M و با نسبت تجانس $k = 2$ رسم کرده ایم. تعداد مماس مشترک دایره و مجانس آن برابر است با: ① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ ۱ پ) در مثلث ABC، $AB = 7$، $AC = 4$، $BC = 10$. طول دو قطعه ای که نیمساز زاویه داخلی C روی ضلع مقابل آن می سازد، کدام است؟ ① ۱، ۶ ② ۲، ۵ ③ ۳، ۴ ④ ۴، ۴			۱/۵
۴	به سوالات زیر پاسخ کوتاه دهید: الف) آیا تبدیل بازتاب، تبدیل همانی می تواند باشد؟ چرا؟ ب) در مثلث قائم الزاویه ای با اضلاع ۳، ۴، ۵ شعاع دایره محیطی مثلث چقدر است؟ چرا؟			۱
۵	نقطه M خارج از دایره $C(O, 4)$ و به فاصله ۶ سانتی متر از مرکز دایره قرار دارد. ابتدا مراحل رسم مماس بر این دایره از نقطه M را توضیح دهید، سپس طول این مماس را محاسبه کنید. (رسم شکل الزامی است).			۱/۵

۲/۲۵	مقدار x را در شکل های زیر محاسبه کنید. (CD موازی AB است)	۶
		
۱/۲۵	ثابت کنید یک چهارضلعی محاطی است اگر دو زاویهء مقابل آن مکمل باشند.	۷
۲	ثابت کنید پنج ضلعی منتظم، محاطی است.	۸
۱/۲۵	در حالت زیر که پاره خط AB با خط بازتاب d متقاطع است، نشان دهید تبدیل بازتاب طولپاست. (یعنی طول پاره خط AB و تصویرش برابر است)	۹
		
۰/۵	الف) دوران یافته شکل زیر را با مرکز دوران A و با زاویه دوران 18° رسم کنید.	۱۰
۰/۵	ب) کدامیک از دوران های زیر با مرکز دوران یکسان، شکل تصویرشان، بر هم منطبق اند؟ ① 12° در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت ② 225° در جهت حرکت عقربه های ساعت ③ 135° در جهت حرکت عقربه های ساعت ④ 24° در خلاف جهت عقربه های ساعت	
۱	می خواهیم مساحت شکل زیر را بدون آنکه محیط آن تغییر کند، به میزان 8 واحد سطح، افزایش دهیم. به کمک تبدیلات هندسی این افزایش سطح را اعمال کنید. (رسم شکل الزامی است).	۱۱
		

۱۲	دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه ای واقع اند. می خواهیم جاده ای از A به B بسازیم به طوری که 10° کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این 10° کیلومتر را درچه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر $ACDB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟ (پاسخ خود را به کمک تبدیلات هندسی توضیح دهید) 
۱۳	در مثلث ABC، میانه AM را رسم کنید و به کمک قضیه کسینوس ها رابطه زیر را اثبات کنید: $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$
۱۴	در شکل زیر، اندازه پاره خط AC را محاسبه کنید. 
۱۵	به کمک فرمول هرون، دستور محاسبه مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع a را به دست آورید.
۲۰	موفق باشید جمع

شماره ۵	نوبت: خرداد - شهریور	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: یازدهم	راهنمای نمره گذاری آزمون درس: هندسه ۲
نمره	راهنمای نمره گذاری			ردیف
۰/۷۵	الف) نادرست (۰/۲۵) ص ۱۲	ب) نادرست (۰/۲۵) ص ۴۰	پ) درست (۰/۲۵) ص ۷۶	۱
۰/۵	الف) ۱۲ (۰/۲۵) ص ۲۲	ب) منفرد (۰/۲۵) ص ۷۶		۲
۱/۵	الف) گزینه ۳ (۰/۵) ص ۱۷	ب) گزینه ۴ (۰/۵) ص ۵۰ و ۲۲	پ) گزینه ۲ (۰/۵) ص ۷۰	۳
۱	الف) خیر، (۰/۲۵) زیرا فقط نقاط روی خط بازتاب، تصویرشان خودشان می شود. (۰/۲۵) ص ۴۹ ب) برابر نصف وتر مثلث یعنی ۲/۵ است. (۰/۲۵) $\rightarrow R = \frac{5}{2}$ (۰/۲۵) $\rightarrow R = \frac{a}{\sin 90^\circ} = 2R$ (۰/۲۵) ص ۶۲			۴
۱/۵	ابتدا از نقطه M به مرکز دایره C(O, 4) وصل می کنیم، سپس وسط پاره خط OM را P می نامیم. (۰/۲۵) دایره ای به مرکز P و قطر OM رسم می کنیم. (۰/۲۵) محل برخورد این دایره با دایره C(O, 4) را نقاط T و T' می نامیم. از M به T و T' وصل می کنیم. (۰/۲۵) مثلث قائم الزویه است. پس: $OM^2 = OT^2 + MT^2$ (۰/۲۵) (به طریق مشابه مثلث.. قائم الزویه است و) $MT' = 2\sqrt{5}$ رسم شکل (۰/۲۵) ص ۱۹			۵
۲/۲۵	 $\widehat{AOC} = \widehat{BOE} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BE}$ (۰/۲۵) $CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{DB}$ (۰/۲۵) $85.5^\circ = \frac{\widehat{AC} + \widehat{DBE}}{2}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 171^\circ = 3\widehat{AC} \Rightarrow \widehat{AC} = 57^\circ$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x = 180^\circ - 2 \times 57^\circ = 66^\circ$ (۰/۲۵)			۶



$$AT^2 = AB \times AC \quad (0/25)$$

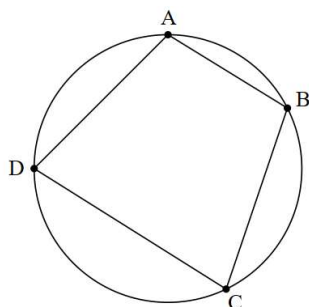
$$\Rightarrow 6^2 = (x-1) \times (2x+1+x-1)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 3x - 36 = 0 \quad (0/25) \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x-4)(x+3) = 0 \rightarrow x = 4, \quad x = -3 \quad (0/5)$$

غ ق ق غ ق ق

۱/۲۵



فرض کنیم چهارضلعی $ABCD$ محاطی باشد، نشان می دهیم :

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ, \quad \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ \quad (0/25)$$

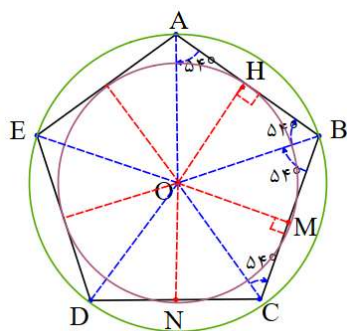
زاویه های $\widehat{A}$ و $\widehat{C}$ محاطی اند و

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} \quad (0/25), \quad \widehat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{BAD}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ \quad (0/25)$$

$$\widehat{B} + \widehat{D} = \frac{\widehat{ADC} + \widehat{ABC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ \quad (0/25) \quad \text{به همین ترتیب ثابت می شود که :}$$

۲



الف) باید نشان دهیم عمود منصف های اضلاع پنج ضلعی در یک نقطه هم‌رسند.

میدانیم اندازه هر زاویه پنج ضلعی منتظم برابر 108° است. $(0/25)$

عمود منصف های دو ضلع AB و BC را رسم می کنیم. فرض کنیم در نقطه O متقاطع اند. بنابراین $OA = OB = OC$. پس :

$$\begin{cases} AB = BC \\ OA = OB \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OBC \quad (0/25) \\ OB = OC \end{cases}$$

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 54^\circ \quad (0/25) \quad \text{بنابراین :}$$

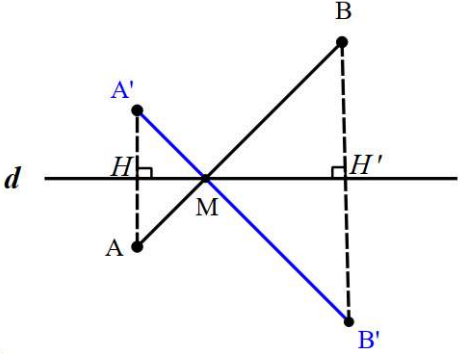
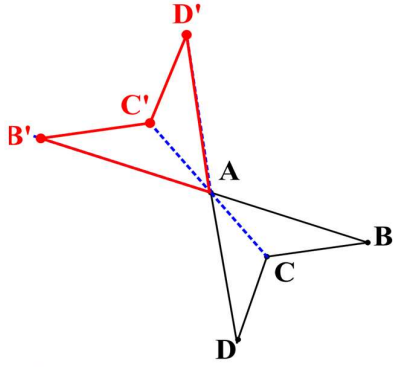
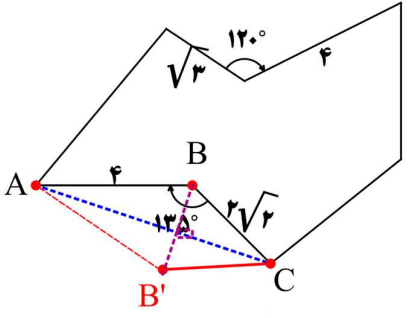
$$\widehat{BCD} = 108^\circ \Rightarrow \widehat{OCB} + \widehat{OCD} = 108^\circ \Rightarrow \widehat{OCD} = 54^\circ \quad (0/25)$$

اکنون از D به O وصل می کنیم.

$$\begin{cases} BC = CD \\ OC = OC \Rightarrow \triangle OCD \cong \triangle OCB \quad (0/25) \\ \widehat{OCB} = \widehat{OCD} = 54^\circ \end{cases}$$

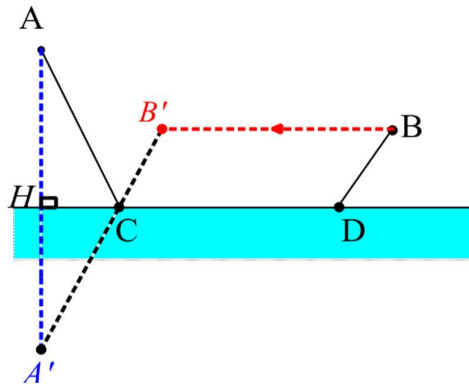
$$\Rightarrow OA = OB = OC = OD \quad (0/25)$$

۸

	با ادامه این روند داریم: $OA = OB = OC = OD = OE$ بنابراین، O از همه راس ها به یک فاصله است، پس O مرکز دایره ای است که از تمام راس های پنج ضلعی منتظم می گذرد. پس O مرکز دایره محیطی پنج ضلعی منتظم است. (۰/۲۵) رسم شکل (۰/۲۵)	
۱/۲۵	 فرض کنیم بازتاب نقطه A نسبت به خط d، نقطه A' و بازتاب نقطه B نسبت به خط d، نقطه B' باشد. با توجه به شکل روبرو $\triangle AHM = \triangle A'HM$ (۰/۵) و $\triangle BMH \cong \triangle B'MH'$ $\Rightarrow AM = A'M \text{ , } BM = B'M$ (۰/۲۵) رسم شکل (۰/۲۵) ص ۳۹	۹
۱	الف) (۰/۵) ب) گزینه ② و ③ (۰/۵)  ص ۴۳	۱۰
۱	 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4 \times \sin(135^\circ) = 4$ (۰/۵) $\Rightarrow 2S = 8$ (۰/۲۵) ص ۵۶ رسم شکل (۰/۲۵)	۱۱

ابتدا تحت تبدیل انتقال که بردار آن در راستای موازی رودخانه و جهت آن از B به سمت A بوده و طول آن برابر ۱۰ کیلومتر باشد، تصویر نقطه B را به دست می آوریم و آن را B' می نامیم. (۰/۲۵) همچنین تصویر نقطه A را تحت بازتابی که خط تقارن آن راستای رودخانه باشد به دست آورده و آن را نقطه A' می نامیم. (۰/۲۵) از B' به A' وصل می کنیم و محل برخورد آن با راستای رودخانه را نقطه C می نامیم، (۰/۲۵) از نقطه C جاده ساحلی CD به طول ۱۰ کیلومتر را احداث خواهیم کرد. با توجه به ویژگی تبدیل انتقال و تبدیل بازتاب خواهیم داشت:

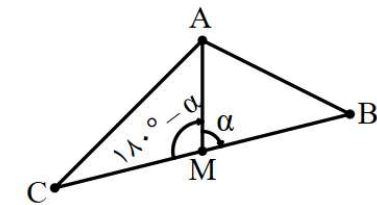
$$ACDB = AC + CD + DB = A'C + CD + CB' = A'B' + ۱۰ \quad (۰/۵)$$



رسم شکل (۰/۲۵)

ص ۵۵

در مثلث های $\triangle AMC$ و $\triangle ABM$ طبق قضیه کسینوس ها داریم:



ص ۶۹

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2 \times BM \times AM \times \cos \alpha \quad (۰/۲۵)$$

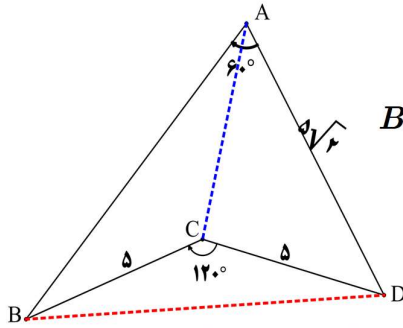
$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2 \times AM \times MC \times \cos(180^\circ - \alpha) \quad (۰/۲۵)$$

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 + 2 \times MC \times AM \times \cos \alpha \quad (۰/۲۵)$$

$$\begin{cases} AB^2 = AM^2 + \frac{BC^2}{4} - AM \times BC \times \cos \alpha \\ AC^2 = AM^2 + \frac{BC^2}{4} + AM \times BC \times \cos \alpha \end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \quad (۰/۲۵)$$

رسم شکل (۰/۲۵)



در مثلث BCD طبق قضیه کسینوس ها داریم :

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \times BC \times CD \times \cos(120^\circ) \quad (0/25)$$

$$= 5^2 + 5^2 + 2 \times 5 \times 5 \times \frac{1}{2} = 75 \Rightarrow BD = 5\sqrt{3} \quad (0/25)$$

در مثلث BCD نیز: $\widehat{CBD} = \widehat{CDB} = 30^\circ \quad (0/25)$

طبق قضیه سینوس ها در مثلث ABD داریم :

$$\frac{BD}{\sin \widehat{A}} = \frac{AD}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{D}} \Rightarrow \frac{5\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{5\sqrt{2}}{\sin \widehat{B}} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 45^\circ \quad (0/25)$$

$$\widehat{D} = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ \Rightarrow \widehat{ADC} = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ \quad (0/25)$$

طبق قضیه کسینوس ها در مثلث ADC داریم :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \times AD \times DC \times \cos(45^\circ) = (5\sqrt{2})^2 + 5^2 - 2 \times 5\sqrt{2} \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow AC = 5 \quad (0/25)$$

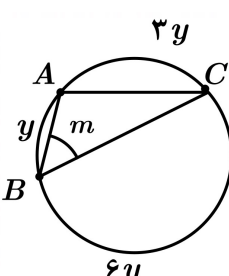
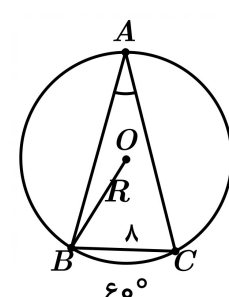
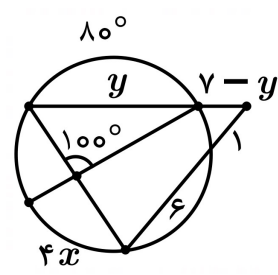
ص ۷۶

$$2p = a + a + a = 3a \quad (0/25)$$

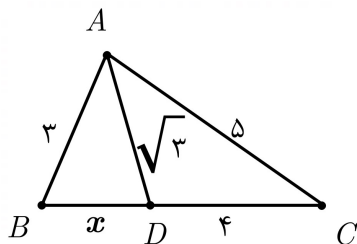
$$S_{ABC} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad (0/25) = \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{3a}{2} - a \right) \left(\frac{3a}{2} - a \right) \left(\frac{3a}{2} - a \right)} \quad (0/25)$$

$$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \quad (0/25)$$

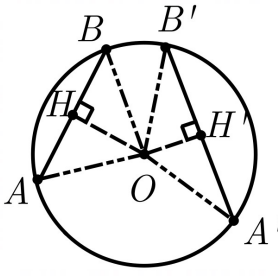
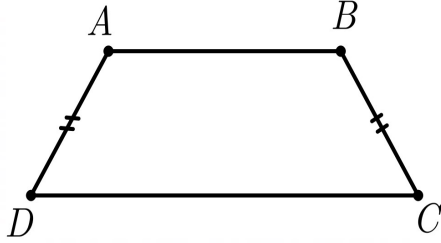
ص ۷۵

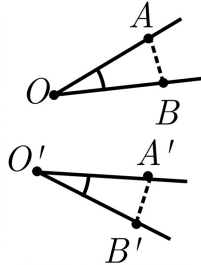
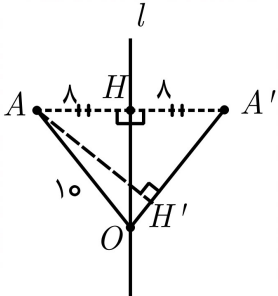
شماره ۶	نوبت: خرداد - شهریور	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: یازدهم	سؤالات آزمون درس: هندسه ۲
ردیف	سؤالات پاسخ‌برگ دارد - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. الف) طول مماس در هر دایره، واسطه هندسی بین دو قطعه قاطع است. (درست - نادرست) ب) تبدیل تجانس، همواره تبدیلی غیر ایزومتري است. (درست - نادرست)			۰/۵
۲	عبارت درست را انتخاب نمایید. الف) یک چهارضلعی است، اگر و تنها اگر دو زاویه ی مقابل آن مکمل باشند. (محاطی - محیطی) ب) کایت یک چهارضلعی است. (محاطی - محیطی) پ) تبدیل T را تبدیل گوئیم، هرگاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم: $T(A) = A$ (همانی - ثابت) ت) در $\triangle ABC$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$. $(\hat{A} > 90^\circ - \hat{A} < 90^\circ)$			۱
۳	در هر یک از سؤالات زیر گزینه مناسب را انتخاب کنید و در پاسخ برگ بنویسید. الف) در شکل مقابل، مقدار m کدام است؟ (۱) ۱۸ درجه (۲) ۳۶ درجه (۳) ۵۴ درجه (۴) ۷۲ درجه  ب) در شکل مقابل مقدار R کدام است؟ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴ 			۰/۵
۴	ثابت کنید در یک دایره از دو وتر نابرابر آن که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است.			۱/۲۵
۵	در شکل مقابل مقادیر x و y را به دست آورید. 			۱/۵
۶	ثابت کنید هر دوزنقه متساوی الساقین، محاطی است.			۱/۲۵

۷	طول خط‌المركزين دو دایره مماس درونی ۲ سانتی متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها 16π سانتی متر مربع است، طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.	۱/۵
۸	دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ را در نظر بگیرید. اگر اندازه مماس خارجی آنها ۱۲ باشد، طول خط‌المركزين این دو دایره را به دست آورید. (نوشتن فرمول الزامی است.)	۱/۲۵
۹	نشان دهید هر تبدیل طولیا اندازه زاویه را حفظ می کند.	۱/۲۵
۱۰	نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط L است. اگر $AA' = 16$ و نقطه O روی خط L و $OA = 10$ باشد، فاصله نقطه A از خط OA' چقدر است؟ (رسم شکل الزامی است.)	۱
۱۱	مطابق شکل روبه‌رو نقطه M را روی خط d چنان در نظر می گیریم که $AM + BM$ کمترین مقدار ممکن باشد. اندازه زاویه $\hat{M}$ را به دست آورید.	۰/۵
۱۲	فرض کنید G محل برخورد میانه‌های ABC (مرکز ثقل آن) و $A'B'C'$ مجانس ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $k = -\frac{1}{2}$ باشد. الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به ABC کجاست؟ ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟	۱/۲۵
۱۳	در شکل مقابل می خواهیم بدون تغییر طول ضلع، مساحت شکل را افزایش دهیم، میزان افزایش مساحت را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۴	در $\triangle ABC$ ، $AB = 2\sqrt{2}$ و $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $\hat{A} = 60^\circ$ طول BC را به دست آورید. (نوشتن فرمول الزامی است.)	۱/۵
۱۵	طول کوتاه‌ترین میانه ABC با طول اضلاع ۴ و ۶ و ۸ را محاسبه کنید. (نوشتن فرمول الزامی است.)	۱/۲۵
۱۶	در شکل مقابل AD نیمساز $\hat{A}$ است. مقدار x را به دست آورید. (نوشتن فرمول الزامی است.)	۱/۲۵

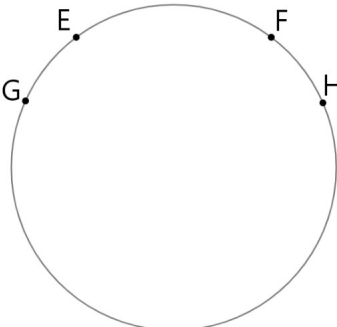
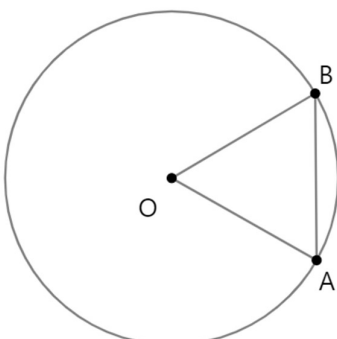
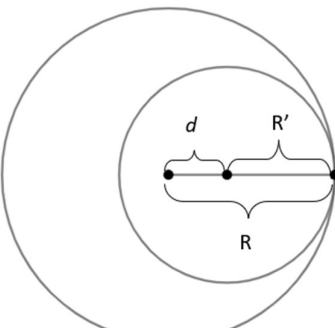


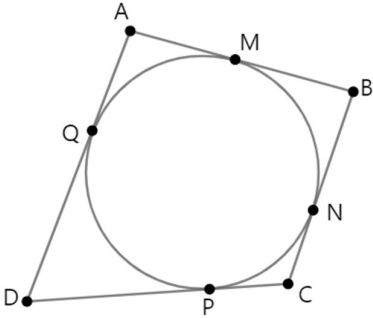
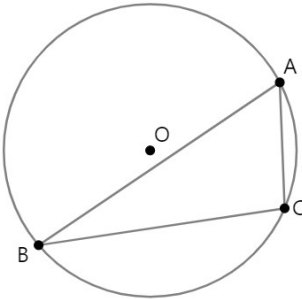
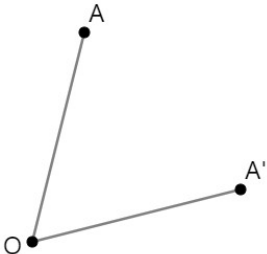
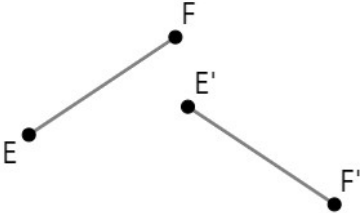
۱۷	اگر $2P$ محیط مثلث ABC با طول اضلاع a و b و c باشد و بدانیم $P = 2 + a$ و $P = 3 + b$ و $P = 2c$ ، شعاع دایره محاطی درونی مثلث ABC را محاسبه کنید. (نوشتن فرمول الزامی است).	۱/۵
۲۰	موفق باشید	جمع

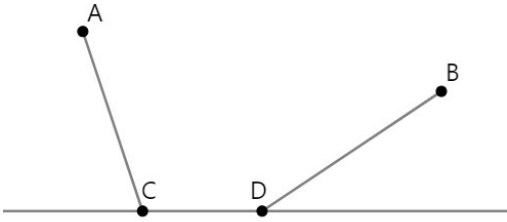
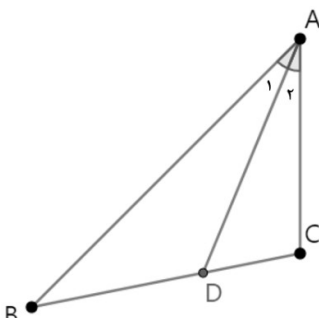
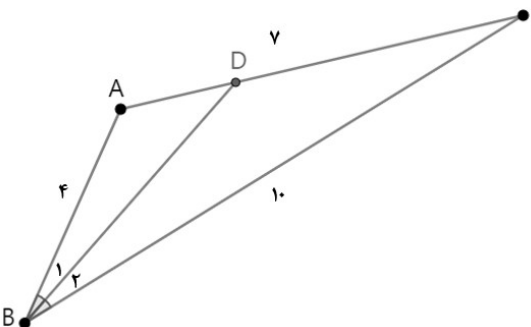
شماره ۶	نوبت: خرداد - شهریور	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: یازدهم	راهنمای نمره‌گذاری آزمون درس: هندسه ۲
نمره	راهنمای نمره‌گذاری			ردیف
۱	الف) درست صفحه ۱۹ کتاب درسی (۰/۲۵) ب) نادرست صفحه ۴۵ کتاب درسی (۰/۲۵)			۱
۱	الف) محاطی صفحه ۲۷ کتاب درسی (۰/۲۵) ب) محیطی صفحه ۲۸ کتاب درسی (۰/۲۵) پ) همانی صفحه ۴۷ کتاب درسی (۰/۲۵) ت) $\hat{A} < 90^\circ$ صفحه ۷۴ کتاب درسی (۰/۲۵)			۲
۰/۵	الف) گزینۀ ۳ یا ۵۴ درجه صفحه ۵۴ کتاب درسی (۰/۲۵) ب) گزینۀ ۲ یا ۸ صفحه ۶۲ کتاب درسی (۰/۲۵)			۳
۱/۲۵	صفحه ۱۷ کتاب درسی $\frac{AB}{\sqrt{L}} < \frac{A'B'}{\sqrt{L'}} \Rightarrow OH' < OH$ $\left. \begin{aligned} \triangle OAH(\hat{H} = 90^\circ) : OH^2 &= R^2 - L^2 \quad (0/25) \\ \triangle OA'H'(\hat{H} = 90^\circ) : OH'^2 &= R^2 - L'^2 \quad (0/25) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{L < L'} \underline{OH'^2 < OH^2} \quad (0/25)$ $\Rightarrow \underline{OH' < OH} \quad (0/25)$  رسم شکل (۰/۲۵)			۴
۱/۵	صفحه ۱۶ و ۱۸ کتاب درسی $\frac{4x + 80}{2} = 100 \Rightarrow 4x + 80 = 200 \Rightarrow x = 30 \quad (0/25)$ $\frac{(7-y)(7)}{(0/25)} = \frac{(1)(7)}{(0/25)} \Rightarrow 7-y = 1 \Rightarrow y = 6 \quad (0/25)$			۵
۱/۲۵	صفحه ۲۹ کتاب درسی $\left. \begin{aligned} \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{C} = \hat{D} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} \quad (0/25)$ $\left. \begin{aligned} \hat{A} + \hat{C} + \hat{B} + \hat{D} = 360^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} \quad (0/25)$  پس دوزنقه محاطی است.			۶
۱/۵	صفحه ۲۳ کتاب درسی $\left. \begin{aligned} d = R - R' = 2 \quad (0/25) \\ \pi R^2 - \pi R'^2 = 16\pi \Rightarrow R^2 - R'^2 = 16 \Rightarrow R + R' = 8 \quad (0/25) \end{aligned} \right\}$ $\Rightarrow \begin{cases} R = 5 \quad (0/25) \\ R' = 3 \quad (0/25) \end{cases}$			۷

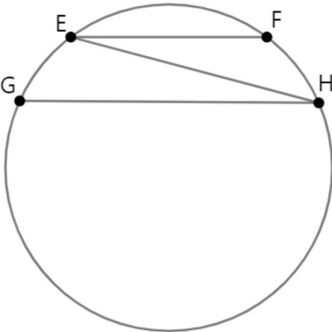
۱/۲۵	صفحه ۲۱ کتاب درسی	۸
	$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 12 = \sqrt{d^2 - (9 - 4)^2} \Rightarrow \underline{d = 13}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)	
۱/۲۵	صفحه ۳۴ کتاب درسی	۹
	$\left. \begin{array}{l} T(A) = A' \\ T(B) = B' \\ T(O) = O' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ AO = A'O' \\ BO = B'O' \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'}_{\text{قضی}} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۲۵)  رسم شکل (۰/۲۵)	
۱	صفحه ۴۳ کتاب درسی	۱۰
	$\frac{OH = 6}{(۰/۲۵)} \quad \frac{16 \times 6}{2} = \frac{10 \times AH'}{2} \Rightarrow AH' = \frac{16 \times 6}{10} = \frac{48}{5} \quad ۹ \quad ۶ /$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)  رسم شکل (۰/۲۵)	
۰/۵	صفحه ۴۳ کتاب درسی	۱۱
	$\hat{M}_1 = 180^\circ - (\underbrace{30^\circ + 30^\circ}_{(۰/۲۵)}) = 180^\circ - 60^\circ = \underline{120^\circ}$ (۰/۲۵)	
۱/۲۵	صفحه ۵۴ کتاب درسی	۱۲
	الف) A' و B' و C' را به ترتیب وسط اضلاع BC و AC و AB در نظر می گیریم. (۰/۲۵) اگر G محل هم‌رسمی میانه های $\triangle ABC$ باشد. چون فاصله G از هر ضلع نصف فاصله G تا رأس روبروی آن ضلع است. (۰/۲۵) پس با توجه به اینکه G بین A و A' و بین B و B' و بین C و C' است، (۰/۲۵) بنابراین A' و B' و C' به ترتیب مجانس A و B و C نسبت به مرکز تجانس G و نسبت $\frac{1}{4}$ می باشند. (۰/۲۵) ب) نسبت تجانس $\frac{1}{4}$ است پس $\frac{1}{4}$ (۰/۲۵)	
۱/۲۵	صفحه ۵۴ کتاب درسی	۱۳
	$S = \underbrace{2}_{(۰/۲۵)} \times \underbrace{\left(\frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 45^\circ\right)}_{(۰/۵)} = \underbrace{4 \times 6}_{(۰/۲۵)} \times \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{(۰/۲۵)} = \underline{12\sqrt{2}}$	

	صفحة ٦٥ کتاب درسی ١٤ $BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ $BC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 - 2(2\sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times \cos 60^\circ$ $BC^2 = 8 + 6 + 2 + 2\sqrt{12} - 2\sqrt{12} - 4$ $BC^2 = 12 \Rightarrow BC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$	
١/٢٥	صفحة ٦٧ کتاب درسی ١٥ $b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \Rightarrow 4^2 + 6^2 = 2AM^2 + \frac{8^2}{2}$ $\Rightarrow 16 + 36 = 2AM^2 + 32$ $\Rightarrow AM^2 = 10$ $\Rightarrow AM = \sqrt{10}$	
١/٢٥	صفحة ٦٩ کتاب درسی ١٦ $AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$ $(\sqrt{3})^2 = (3) \times (5) - (x) \times (4)$ $3 = 15 - 4x$ $\Rightarrow x = 3$	
١/٥	صفحة ٧١ کتاب درسی ١٧ $S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ $S = \sqrt{P(2)(2)(P - \frac{P}{2})}$ $S = \sqrt{2P^2}$ $S = P\sqrt{2} \Rightarrow \frac{S}{P} = \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$	
سپاس و خداقوت خدمت همکار گرامی		

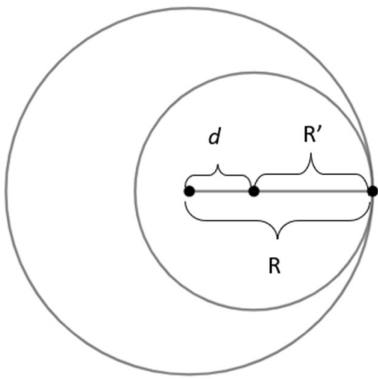
سؤالات آزمون درس : هندسه ۲	پایه: یازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: خرداد - شهریور	شماره ۷
ردیف	سؤالات پاسخ‌برگ دارد- استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			
۱	درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را مشخص کنید. الف) اندازه زاویه ظلّی برابر است با اندازه کمان روبه‌رو به آن زاویه. ب) یک چهارضلعی محاطی است اگر فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند. ج) انتقال یک تبدیل طولپا است. د) تجانس با نسبت $k = -1$ دارای بیشمار نقطه ثابت تبدیل است.			
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) اگر A نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OA و خط مماس بر دایره در نقطه A ب) در حالت کلی بازتاب شیب خط را ج) در هر مثلث دلخواه نسبت اندازه هر ضلع به زاویه روبه‌رو به آن برابر است با شعاع			
۳	در شکل مقابل کمان‌های EG و FH هم‌اندازه‌اند. با رسم وترهای EF و GH نشان دهید $EF \parallel GH$.			
				
۴	در دایره $C(O, R)$ می‌دانیم $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 2$ ؛ الف) فاصله O را از وتر AB به دست آورید. ب) مساحت قطاع OAB را محاسبه کنید.			
				
۵	فرض کنید $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ دو دایره مماس خارج باشند، با استفاده از دستور محاسبه طول مماس مشترک خارجی، نشان دهید $TT' = 2\sqrt{RR'}$.			
۶	طول خط‌المركزین دو دایره مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها 24π سانتی‌مترمربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.			
				

۷	نشان دهید اگر یک چهارضلعی محیطی باشد آنگاه مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر است. 	۱
۸	ثابت کنید عمود منصف ضلع BC و نیمساز زاویه A یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند. 	۱
۹	نشان دهید هر تبدیل طولیا اندازه زاویه را حفظ می‌کند.	۱/۲۵
۱۰	الف) در شکل مقابل نقطه A' دوران یافته نقطه A در دوران به مرکز O و زاویه α است، نشان دهید عمود منصف AA' از نقطه O می‌گذرد.  ب) اگر بدانیم $E'F'$ دوران یافته EF تحت زاویه α است، مرکز دوران را مشخص کنید و روش کار را توضیح دهید. 	۱/۵
۱۱	مربع $ABCD$ را در تجانسی با نسبت تجانس $k = -\frac{1}{2}$ و به مرکز O محل تلاقی قطرهای تصویر کرده‌ایم. اگر $A'B'C'D'$ تصویر این مربع باشد، الف) شکل را رسم کنید و نوع تجانس را از نظر مستقیم و معکوس و منبسط و منقبض شدن مشخص کنید. ب) اگر مساحت $ABCD$، برابر ۱۶ واحد سطح باشد، محیط $A'B'C'D'$ را به دست آورید.	۱/۵

۱۲	دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقع اند می خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم که ۲ کیلومتر آن در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۲ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر $ACDB$ کوتاهترین مسیر ممکن باشد. (فقط روش کار را با رسم شکل مناسب توضیح دهید.)  رودخانه	۱
۱۳	در مثلث ABC، $BC = ۵$ و $\angle A = ۶^\circ$ و $AC = \frac{۵\sqrt{۶}}{۳}$ اندازه‌های زوایای B و C را به دست آورید.	۱/۵
۱۴	ثابت کنید در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند. فرض: $\angle A_1 = \angle A_2$ حکم: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ 	۱
۱۵	در مثلث ABC، $AB = ۴$، $AC = ۷$ و $BC = ۱۰$ است، طول نیمساز زاویه داخلی B را به دست آورید. 	۱/۵
۱۶	الف) فرمول مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید. ب) مساحت مثلثی متساوی الاضلاع را به دست آورید که در دایره‌ای به شعاع $R = \sqrt{۳}$ محاط شده باشد.	۱/۵
۲۰	جمع	موفق باشید

شماره ۷	نوبت: خرداد - شهریور	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: یازدهم	راهنمای نمره گذاری آزمون درس: هندسه ۲
نمره	راهنمای نمره گذاری			ردیف
۱	الف) نادرست. صفحه ۱۵ (۰/۲۵) ب) درست. صفحه ۲۷ (۰/۲۵) ج) درست. صفحه ۳۹ (۰/۲۵) د) نادرست. صفحه ۴۳ با توجه به تعریف تجانس (۰/۲۵)			۱
۱	الف) برهم عمودند. صفحه ۱۱ (۰/۲۵) ب) حفظ نمی کند. صفحه ۳۸ (۰/۲۵) ج) سینوس - دایره محیطی مثلث. صفحه ۶۲ (۰/۵)			۲
۱/۲۵	وترهای EF و GH را رسم می کنیم و یکی از دو وتر EH یا FG را رسم می کنیم: (۰/۲۵)  $(0/5) \quad \widehat{E} = \frac{\widehat{FH}}{2} = \frac{\widehat{GE}}{2} = \widehat{H}$ لذا بنابر قضیه خطوط موازی و مورب $EF \parallel GH$ (۰/۲۵) رسم مناسب شکل (۰/۲۵) صفحه ۱۵ کتاب درسی			۳
۱/۵	الف) چون $\widehat{AB} = 60^\circ$ پس $\angle AOB = 60^\circ$ (۰/۲۵) و چون $\triangle OAB$ متساوی الساقین است پس $\triangle OAB$ متساوی الاضلاع است (۰/۲۵) پس $OB = 2$ و $AH = 1$ (۰/۲۵) لذا بنا به رابطه فیثاغورس $OH = \sqrt{3}$ (۰/۲۵) ب) $(0/5) \quad S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} = \frac{2\pi}{3}$ درس ۱ صفحات ۱۲ و ۱۳ و تمرین ۷ صفحه ۱۷ کتاب درسی			۴
۱	می دانیم طول مماس مشترک خارجی از رابطه $TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$ محاسبه می شود. (۰/۲۵) و در حالی که دو دایره مماس خارج باشند (۰/۲۵) $d = R + R'$ $TT' = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2} = \sqrt{R^2 + 2RR' + R'^2 - (R^2 - 2RR' + R'^2)}$ $= \sqrt{4RR'} = 2\sqrt{RR'} \quad (0/5)$ صفحه ۲۱ و ۲۲ کتاب درسی			۵

$$d = R - R' = ۲; \quad (۰/۲۵)$$



۱/۵

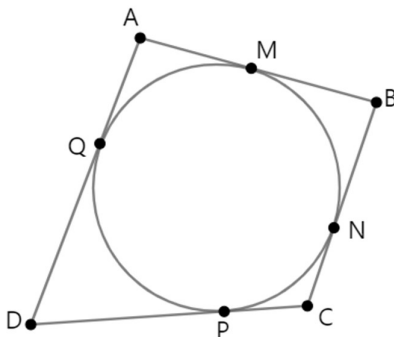
$$\pi R^2 - \pi R'^2 = ۲۴\pi \Rightarrow (R - R')(R + R') = ۲۴ \Rightarrow ۲(R + R') = ۲۴$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$$\begin{cases} R + R' = ۱۲ \\ R - R' = ۲ \end{cases} \Rightarrow R = ۷, R' = ۵ \quad (۰/۵)$$

رسم شکل (۰/۲۵)

شبیه تمرین صفحه ۲۳ کتاب درسی



۱

با توجه به این که طول مماس های رسم شده از یک نقطه بر دایره با هم برابرند داریم

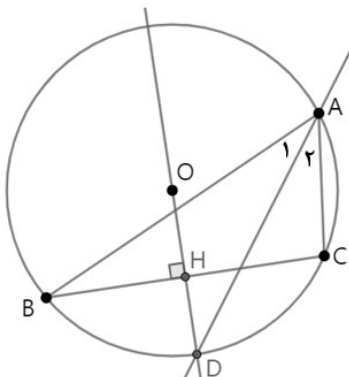
$$\begin{aligned} AB + CD &= AM + MB + CP + PD \\ &= AQ + BN + CN + DQ = AD + BC \end{aligned} \quad (۰/۵)$$

صفحه ۲۸ کتاب درسی

راه اول: عمود منصف BC را رسم کرده و محل برخورد آن با دایره محیطی را D می نامیم. (۰/۲۵) می دانیم که عمود منصف وتر BC، کمان BC را نیز نصف می کند.

$$\widehat{BD} = \widehat{DC} \Rightarrow \angle A_1 = \angle A_2 \quad (۰/۲۵)$$

لذا D روی نیمساز زاویه A است. (۰/۲۵)



۱

راه دوم: نیمساز زاویه A را رسم کرده و محل برخورد آن با دایره محیطی را D می نامیم. (۰/۲۵)

$$\widehat{BD} = \widehat{DC} \Rightarrow BD = DC \quad (۰/۲۵)$$

لذا D روی عمود منصف وتر است. (۰/۲۵)

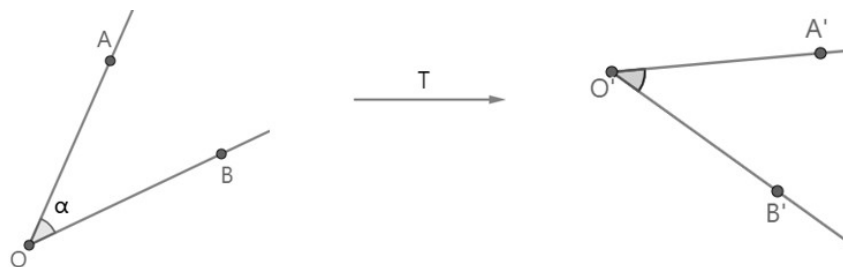
رسم شکل (۰/۲۵)

صفحه ۲۹ کتاب درسی

فرض کنیم T تبدیلی طولیاست و داریم $T(O) = O'$ و $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$. (۰/۲۵)

۱/۲۵

(۰/۲۵)

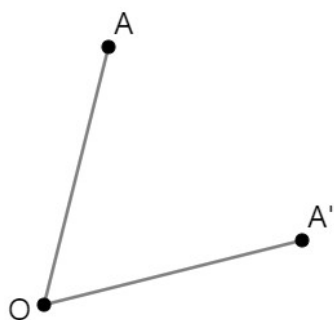


$$\left. \begin{array}{l} T(OA) = O'A' \Rightarrow OA = O'A' \\ T(OB) = O'B' \Rightarrow OB = O'B' \\ T(OC) = O'C' \Rightarrow OC = O'C' \end{array} \right\} \begin{array}{l} (0/25) \\ (0/25) \\ (0/25) \end{array} \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OA'B' \Rightarrow \angle O = \angle O' = \alpha$$

صفحه ۳۴ کتاب درسی

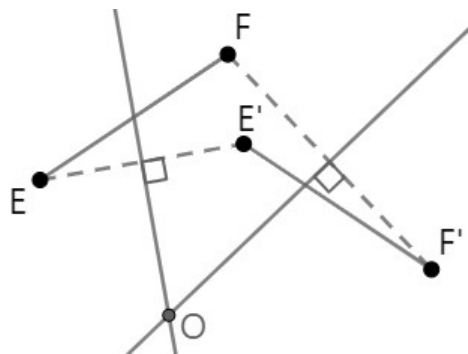
۱۰

الف) بنابر تعریف دوران، $OA = OA'$ (۰/۲۵) لذا نقطه O از دو سر پاره خط AA' به یک فاصله است (۰/۲۵) بنابراین عمود منصف پاره خط AA' از مرکز دوران یعنی نقطه O می‌گذرد. (۰/۲۵)



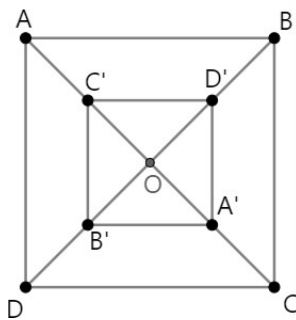
۱/۵

ب) پاره خط‌های EE' و FF' را رسم کرده و عمود منصف‌های آنها را رسم می‌کنیم. محل برخورد عمود منصف‌ها همان مرکز دوران است. (۰/۲۵)



رسم شکل (۰/۵)

صفحه ۴۲ کتاب درسی



$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = k^2 \quad (۰/۲۵) \quad \text{ب)}$$

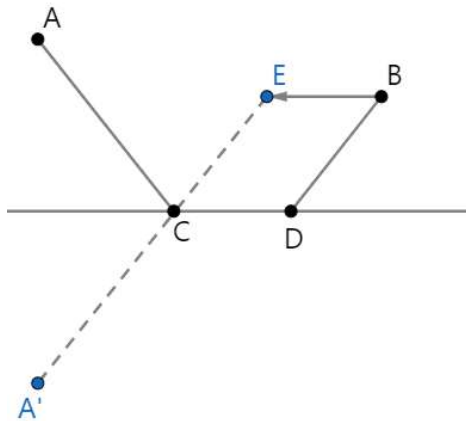
$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{۱۶} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow S_{A'B'C'D'} = ۴ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow A'B' = ۲ \Rightarrow P_{A'B'C'D'} = ۴ \times ۲ = ۸ \quad (۰/۲۵)$$

با توجه به صفحات ۴۴ و ۴۶ کتاب درسی

۱/۵

ابتدا از شهر B به اندازه ۲ کیلومتر به موازات رودخانه به سمت شهر A حرکت می کنیم تا به نقطه E برسیم. (۰/۲۵)



بازتاب نقطه A را نسبت به لبه رودخانه به دست آورده و A' می نامیم. (۰/۲۵)

از E به A' وصل می کنیم و محل برخورد EA' با لبه رودخانه را C می نامیم. (۰/۲۵)

از B به موازات EC خط رسم می کنیم تا لبه رودخانه را در D قطع کند (یا از C در لبه رودخانه ۲ کیلومتر به سمت راست حرکت می کنیم تا به نقطه D برسیم). مسیر ACDB کوتاهترین مسیر ممکن است. (۰/۲۵)

مثال صفحه ۵۳ کتاب درسی

۱

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{۵\sqrt{۶}}{۳} = \frac{۵}{\sin ۶۰^\circ} \quad (۰/۲۵)$$

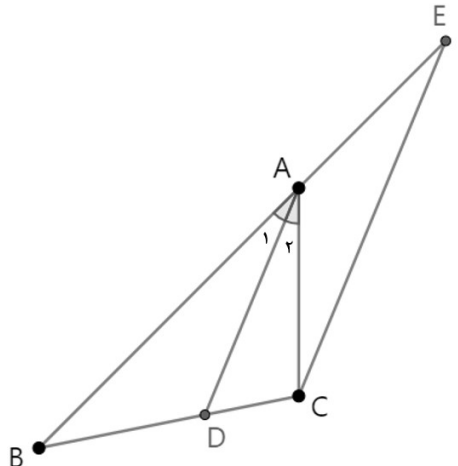
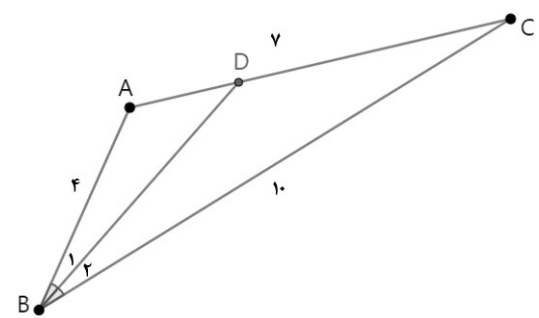
$$\frac{\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad (۰/۲۵)}{\sin B = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۵\sqrt{۶}}{۳}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad (۰/۲۵)$$

$$\angle A = ۶۰^\circ \quad (۰/۲۵) \text{ و } \angle B = ۱۳۵^\circ \text{ (غیرممکن)} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \angle C = ۷۵^\circ \quad (۰/۲۵)$$

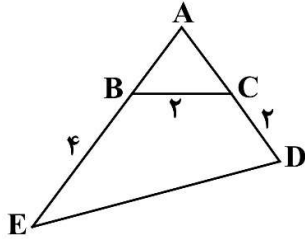
$$\Rightarrow \angle B = ۴۵^\circ$$

برگرفته از مثال ۱ صفحه ۶۲ کتاب درسی

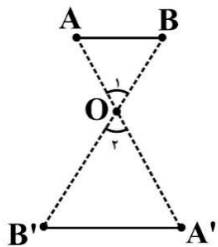
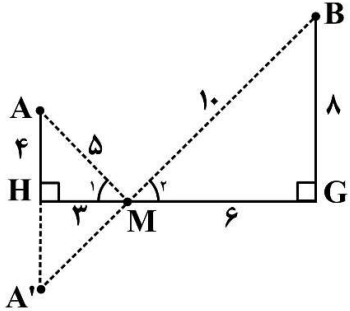
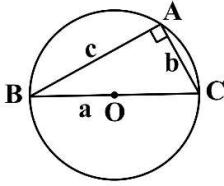
۱/۵

۱	 فرض: $\angle A_1 = \angle A_4$ حکم: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ از راس C به موازات AD خطی رسم می کنیم تا امتداد BA را مطابق شکل در نقطه E قطع کند. (۰/۲۵) $AD \parallel CE$ لذا بنابه قضیه تالس داریم (*) $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$ (۰/۲۵) بنابراین $AD \parallel CE$ و $\angle E = \angle A_1 = \angle A_4 = \angle C$ لذا $AE = AC$ (۰/۲۵) پس بنابه رابطه (*) داریم $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (۰/۲۵) صفحه ۶۸ کتاب درسی	۱۴
۱/۵	 $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{10} \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow \frac{AD}{AD+DC} = \frac{4}{4+10} \text{ (۰/۲۵)}$ $\frac{AD}{AC} = \frac{4}{14} \Rightarrow \frac{AD}{7} = \frac{2}{7} \Rightarrow AD = 2 \text{ (۰/۲۵)}$ $DC = AC - AD = 7 - 2 = 5 \text{ (۰/۲۵)}$ $BD^2 = BA \times BC - AD \times DC \text{ (۰/۲۵)}$ $BD^2 = 4 \times 10 - 2 \times 5 = 40 - 10 = 30 \Rightarrow BD = \sqrt{30} \text{ (۰/۲۵)}$ صفحه ۷۰ کتاب درسی	۱۵
۱/۵	الف) $a = b = c \Rightarrow p = \frac{3a}{2} \text{ (۰/۲۵)}$ $\Rightarrow S = \sqrt{\frac{3a}{2} \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{a}{2}\right)} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ (۰/۲۵)}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (۰/۲۵)}$ ب) $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{3} \text{ (۰/۲۵)} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3 \text{ (۰/۲۵)}$ $\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{3}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ (۰/۲۵)}$ صفحات ۷۴ و ۶۲ کتاب درسی	۱۶

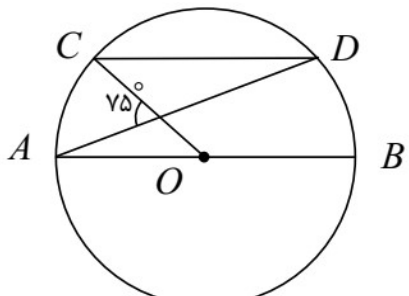
سؤالات آزمون درس : هندسه ۲	پایه: یازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: خرداد - شهریور	شماره ۸
ردیف	سؤالات پاسخ‌برگ دارد- استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			نمره
۱	درستی یا نادرستی هریک از عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) اندازه کمان، همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود. ب) در یک چند ضلعی محاطی با مساحت S و محیط $2P$، اگر شعاع دایره محیطی برابر r باشد، آنگاه $S = rP$. پ) هر تبدیلی که در آن اندازه زاویه حفظ شود، تبدیلی طولیاست. ت) در بازتاب جهت شکل حفظ می‌شود.			۱
۲	جمله‌های زیر را کامل کنید. الف) دایره، شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه روی دایره است. ب) یک چهارضلعی است هرگاه دو زاویه مقابل آن مکمل باشند. پ) در تجانس با مقیاس منفی، جهت شکل حفظ ت) شرط اینکه تجانس تبدیلی طولی باشد، این است که			۱
۳	در شکل روبه‌رو، دو دایره هم‌مرکز داده شده است. اگر $OC = 3OA$ و مساحت قطاع COD برابر 3π باشد، مساحت قطاع AOB را به دست آورید.			۱/۵
۴	در شکل مقابل، با توجه به اینکه $\widehat{DAE}$ زاویه خارجی مثلث ABD است. نشان دهید $\widehat{DAE} = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$			۰/۷۵
۵	در شکل مقابل $AB = 5$ و $CD = 9$ است. اگر $MT = 6$ باشد، طول پاره‌های MB و MD را حساب کنید.			۲
۶	وضعیت نسبی دو دایره $C(O, 9)$ و $C'(O', 4)$ را با مرکزهای $O(7, 1)$ و $O'(-6, 1)$، تعیین کنید.			۰/۷۵
۷	مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC = 10$، مفروض است. اگر ارتفاع وارد بر ساق AC برابر $9/6$ و شعاع دایره محاطی خارجی مماس بر ضلع AB برابر 8 باشد، ارتفاع AH و شعاع دایره محاطی داخلی را به دست آورید.			۲
۸	نشان دهید بازتاب، در حالتی که پاره خط AB با خط بازتاب d موازی باشد، تبدیلی طولیاست.			۱/۵
۹	با رسم شکل، نشان دهید برای حالتی که نقطه O غیر واقع بر خط AB است و $k < 0$، تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند.			۱/۵

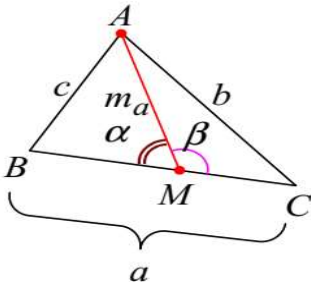
۲	 با توجه به شکل، نقطه M روی پاره خط HG را طوری بیابید که مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد، سپس کمترین مقدار عددی $AM + MB$ را به دست آورید.	۱۰
۲	قضیه سینوس‌ها را بنویسید و آن را برای مثلث قائم‌الزاویه ثابت کنید.	۱۱
۱	در مثلث ABC ، $AB = 3$ ، $AC = 5$ و $\hat{A} = 120^\circ$ است. اندازه ضلع BC را محاسبه کنید.	۱۲
۱	مثلثی با اضلاع $AB = 4$ ، $AC = 6$ و $BC = 8$ مفروض است. طول میانه AM را به دست آورید.	۱۳
۱	مساحت مثلثی با اضلاع ۵، ۶ و ۷ را تعیین کنید.	۱۴
۱	 در شکل مقابل، ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. مساحت چهارضلعی $BCDE$ را محاسبه کنید.	۱۵
۲۰	موفق باشید	جمع

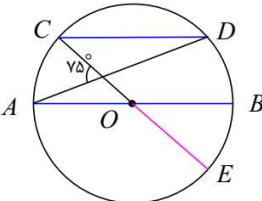
شماره ۸		نوبت: خرداد - شهریور	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: یازدهم	راهنمای نمره‌گذاری آزمون درس: هندسه ۲
نمره	راهنمای نمره‌گذاری				ردیف
۱	(الف) درست (ص ۱۲) (ب) نادرست (کاردرکلاس ص ۲۵) (پ) نادرست (ص ۳۴) (ت) نادرست (ص ۳۸) (هر مورد: ۰/۲۵)				۱
۱	(الف) کمان (ص ۱۲) (ب) محاطی (ص ۲۷) (ت) $ k =1$ (فعالیت ص ۴۵) (پ) می‌شود (کاردرکلاس ص ۴۸) (هر مورد: ۰/۲۵)				۲
۱/۵	$\frac{S_{AOB}}{S_{COD}} = \frac{\frac{\pi(OA)^2 \alpha}{360}}{\frac{\pi(OC)^2 \alpha}{360}} = \left(\frac{OA}{OC}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ $\frac{S_{AOB}}{3\pi} = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{AOB} = \frac{\pi}{3}$ (کاردرکلاس ص ۱۲)				۳
۰/۷۵	$\left. \begin{aligned} \widehat{DAE} &= \widehat{D} + \widehat{B} \\ \widehat{D} &= \frac{1}{2} \widehat{BC} \\ \widehat{B} &= \frac{1}{2} \widehat{DE} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{DAE} = \frac{1}{2} (\widehat{BC} + \widehat{DE})$ (فعالیت ص ۱۶)				۴
۲	$\underbrace{MT^2}_{(0/25)} = \underbrace{MA \cdot MB}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{6^2}_{(0/25)} = \underbrace{MA(MA + AB)}_{(0/25)}$ $\Rightarrow 36 = MA(MA + 5) \Rightarrow MA = 4 \Rightarrow \underbrace{MB = 9}_{(0/25)}$ $\underbrace{MT^2}_{(0/25)} = \underbrace{MC \cdot MD}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{6^2}_{(0/25)} = \underbrace{MC(MC + CD)}_{(0/25)}$ $\Rightarrow 36 = MC(MC + 9) \Rightarrow MC = 3 \Rightarrow \underbrace{MD = 12}_{(0/25)}$ (فعالیت ص ۱۸)				۵

۱/۵	$\left. \begin{aligned} OA' &= k \cdot OA \\ OB' &= k \cdot OB \\ \hat{O}_1 &= \hat{O}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta AOB \sim \Delta A'OB' \quad (0/25)$ $\Rightarrow \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow AB \parallel A'B' \quad (0/25)$  رسم شکل: (0/25) (فعالیت ص ۴۶)	۹
۲	کافیست نقطه B را به بازتاب نقطه A نسبت به پاره خط HG یعنی نقطه A' وصل کنیم. (0/25) محل تلاقی پاره خط BA' با پاره خط HG را M می‌نامیم. مسیر AMB، کوتاه‌ترین مسیر ممکن است. (0/25) رسم شکل: (0/25) $\left. \begin{aligned} \hat{H} &= \hat{G} = 90^\circ \\ M_1 &= M_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta AMH \sim \Delta BMG \quad (0/25)$ $\Rightarrow \frac{AH}{BG} = \frac{MH}{MG} \quad (0/25)$ $\left. \begin{aligned} \frac{MH}{MG} &= \frac{1}{2} \\ MH + MG &= 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} MH = 3 \\ MG = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM = 5 \\ BM = 10 \end{cases}$  $\Rightarrow AM + MB = 15 \quad (0/25)$ (ص ۵۲)	۱۰
۲	قضیه سینوس ها (0/5): در مثلث ABC با اضلاع $AB = c$ و $AC = b$، $BC = a$ داریم: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ که R شعاع دایره محیطی مثلث است. $\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BC}}{2} \\ \hat{A} &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{BC} = 180^\circ \Rightarrow a = 2R \quad (0/25)$ $\left. \begin{aligned} \sin B &= \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = a \\ \sin C &= \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = a \\ \sin 90^\circ &= 1 \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (0/25)$  رسم شکل: (0/25) (فعالیت ص ۶۰)	۱۱

۱	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC) \cdot \cos(120^\circ) \quad (0/5)$ $BC^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (0/25)$ $BC^2 = 49 \Rightarrow BC = 7 \quad (0/25)$ (مثال ص ۶۵)	۱۲
۱	$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2} \quad (0/5)$ $\Rightarrow 6^2 + 4^2 = 2AM^2 + \frac{8^2}{2} \quad (0/25)$ $\Rightarrow 52 = 2AM^2 + 32$ $\Rightarrow 2AM^2 = 20 \Rightarrow AM = \sqrt{10} \quad (0/25)$ (تمرین ص ۶۷)	۱۳
۱	$p = \frac{5+6+7}{2} = 9 \quad (0/25)$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (0/25)$ $\Rightarrow S = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} \quad (0/25)$ $\Rightarrow S = 6\sqrt{6} \quad (0/25)$ (مثال ص ۷۱)	۱۴
۱	$AB = AC = BC = 2 \quad (0/25)$ $S_{\triangle ABC} = \frac{2^2 \times \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \quad (0/25)$ $S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin(60^\circ) = 6\sqrt{3} \quad (0/25)$ $S_{BCDE} = 6\sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3} \quad (0/25)$ (تمرین ص ۷۳)	۱۵
سپاس و خداقوت خدمت همکار گرامی		

سؤالات آزمون درس : هندسه ۲	پایه: یازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: خرداد - شهریور	شماره ۹
ردیف	سؤالات پاسخ‌برگ دارد - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			نمره
۱	درست یا نادرست بودن عبارتهای زیر را مشخص کنید: الف) اگر در یک دایره دو وتر برابر باشند، آنگاه کمان های نظیر دو وتر برابرند. ج) ترکیب دو بازتاب که محور های بازتاب موازی باشند، یک انتقال است. د) در مثلث ABC، $\hat{A} < 90^\circ$، اگر و تنها اگر $a^2 + b^2 > c^2$			۱
۲	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید: الف) بزرگترین وتر دایره را می نامند. ب) یک تبدیل را گویند هرگاه هر نقطه A از صفحه P را به خود آن نقطه تصویر کند. ج) اگر فاصله وتر AB از مرکز دایره $C(O, 13)$ برابر ۵ باشد طول وتر AB برابر با است. د) اگر A' و B' به ترتیب دوران یافته نقاط A و B به مرکز O و زاویه θ باشند، عمود منصف های دو پاره خط غیر موازی AA' و BB' همدیگر را در قطع می کنند.			۱
۳	ثابت کنید: اگر از یک نقطه واقع در بیرون دایره یک مماس و یک قاطع نسبت به دایره ای رسم کنیم، اندازه مماس واسطه ی هندسی بین اندازه ی دو قطعه ی قاطع است.			۱/۵
۴	در شکل زیر نقطه O مرکز دایره و $AB \parallel CD$، اندازه کمان CD را بدست آورید. 			۱/۵
۵	دو دایره $C(O, 2x + 4)$، $C'(O', 2x)$ مماس خارجی هستند اگر طول خط المکرزین $d = 5x + 3$ باشد طول مماس مشترک خارجی را بدست آورید.			۱/۵
۶	یک دوزنقه، هم محیطی و هم محاطی است. ثابت کنید: مساحت این دوزنقه با حاصل ضرب میانگین هندسی اندازه های دو قاعده در میانگین حسابی آنها برابر است.			۱/۵
۷	درحالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد ثابت کنید که AB و بازتاب آن هم اندازه هستند. (در دو حالت پاره خط AB محور بازتاب را قطع می کند و پاره خط AB محور بازتاب را قطع نمی کند ثابت شود)			۱/۵
۸	ثابت کنید تجانس شیب خط را حفظ می کند. (حالتی را ثابت کنید که $k < 0$ باشد)			۱/۵
۹	نقطه A به فاصله $2\sqrt{6}$ از خط d قرار دارد. تصویر نقطه A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطه A' می نامیم. نقطه A را حول نقطه A' به اندازه 120° درجه دوران می دهیم تا نقطه A'' حاصل شود. طول پاره خط AA'' را محاسبه کنید.			۱/۵

۱۰	دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه ای واقعند. می خواهیم جاده ای از A به B بسازیم بطوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود روی شکل محل جاده ساحلی را مشخص کنید بطوری که مسیر بدست آمده کوتاهترین مسیر باشد. 	۱/۵
۱۱	در مثلث ABC میانه AM را رسم کرده ایم $(BM = MC = \frac{BC}{2}, BC = a)$. با استفاده از قضیه کسینوس ها درستی تساوی زیر را ثابت کنید. $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$ 	۱/۵
۱۲	در مثلث ABC داریم $AB = 3$، $AC = 5$ و $BC = 7$. طول نیمساز زاویه A را بدست آورید.	۱/۵
۱۳	اندازه های سه ضلع مثلثی ۳، ۵ و ۷ می باشند. اندازه زاویه مقابل به ضلع ۷ سانتی متر را بدست آورید.	۱/۵
۱۴	در مثلث ABC، $\hat{A} < 90^\circ$ دایره محیطی آن را در نظر بگیرید. قضیه سینوس ها را در این مثلث ثابت کنید. (همراه با رسم شکل)	۱/۵
۲۰	موفق باشید	جمع

شماره ۹		نوبت: خرداد - شهریور	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: یازدهم	راهنمای نمره گذاری آزمون درس: هندسه ۲
ردیف	راهنمای نمره گذاری				
۱	(الف) درست صفحه ۱۲ (ج) درست تمرین ۴ صفحه ۴۴ هر مورد ۰,۲۵ (ب) نادرست صفحه ۲۲ (د) نادرست تمرین صفحه ۷۶				
۲	(الف) قطر صفحه ۱۲ (ج) ۲۴ صفحه ۱۱ هر مورد ۰,۲۵ (ب) همانی صفحه ۴۹ (د) مرکز دوران (نقطه O) تمرین صفحه ۴۴				
۳	نقطه T را به A و B وصل می کنیم در این صورت زاویه $\widehat{MTA}$ ظلی و زاویه $\widehat{BTA}$ محاطی روبرو به کمان $\widehat{AT}$ است. $\widehat{MTA} = \widehat{BTA} = \frac{\widehat{AT}}{۲}; \circ/۵$ $\left. \begin{matrix} \widehat{MTA} = \widehat{BTA} \\ \widehat{M} = \widehat{M} \end{matrix} \right\} \rightarrow MTA \sim MTB; \circ/۵ \rightarrow \frac{MT}{MB} = \frac{MA}{MT}; \circ/۲۵ \rightarrow MT^۲ = MA \times MB; \circ/۲۵$ قضیه صفحه ۱۹				
۴	ابتدا قطر CE را رسم می کنیم. $\widehat{AOC} = \widehat{AC} = \widehat{BE} = x \quad \circ.۲۵$ $AB \parallel CD \rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = x \quad \circ.۲۵, \widehat{DE} = ۲x; \circ/۲۵$ $\frac{\widehat{AC} + \widehat{DE}}{۲} = ۷۵^\circ \circ.۲۵ \rightarrow \frac{x + ۲x}{۲} = ۷۵^\circ \rightarrow x = ۵۰^\circ \circ.۲۵ \rightarrow \widehat{CD} = ۱۸۰^\circ - ۲(۵۰^\circ) = ۸۰^\circ; \circ/۲۵$  تمرین ۴ صفحه ۱۷				
۵	$\underbrace{d = R + R'}_{\circ/۵} \Rightarrow \underbrace{\Delta x + ۳}_{\circ/۵} = \underbrace{۲x + ۴ + ۲x}_{\circ/۵} \rightarrow x = ۱$ $\rightarrow \begin{cases} R = ۲x + ۴ = ۶ \\ R' = ۲x = ۲ \\ d = \Delta x + ۳ = ۸ \end{cases} \Rightarrow AB = \underbrace{\sqrt{d^۲ - (R - R')^۲}}_{\circ/۵} = \sqrt{۶۴ - ۱۶} = \sqrt{۴۸}$ مشابه تمارین صفحه ۲۳				

دوزنقه $ABCD$ محاطی است پس متساوی الساقین است، پس

$$AB = CD = x \quad \circ/۲۵, \quad y + b + y = a \rightarrow y = \frac{a-b}{۲} \quad \circ/۲۵$$

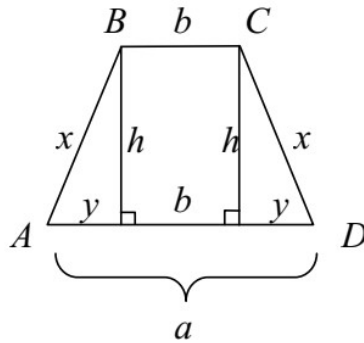
دوزنقه $ABCD$ محیطی است، پس

$$AB + CD = AD + BC \rightarrow x = \frac{a+b}{۲} \quad \circ/۲۵$$

$$h^۲ = x^۲ - y^۲ = \left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ - \left(\frac{a-b}{۲}\right)^۲ = ab \rightarrow h = \sqrt{ab}$$

$$\rightarrow S = \frac{۱}{۲}(a+b)h = \frac{۱}{۲}(a+b)\sqrt{ab} \quad \circ/۲۵$$

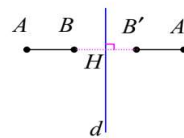
تمرین ۴ صفحه ۲۹



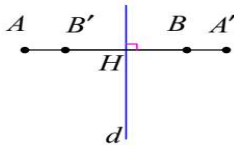
۱/۵

۱/۵

حالت اول) پاره خط AB محور بازتاب را قطع نمی کند: (تمرین ۱ صفحه ۴۴)



$$\left. \begin{array}{l} AH = A'H \\ BH = B'H \end{array} \right\} \rightarrow \underbrace{AH - BH = A'H - B'H}_{\circ/۲۵} \rightarrow AB = A'B'$$



حالت دوم) پاره خط AB محور بازتاب را قطع می کند:

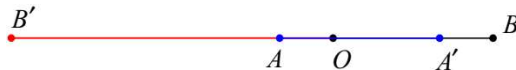
$$\left. \begin{array}{l} AH = A'H \\ BH = B'H \end{array} \right\} \rightarrow \underbrace{AH + BH = A'H + B'H}_{\circ/۲۵} \rightarrow AB = A'B'$$

۱/۵

۸

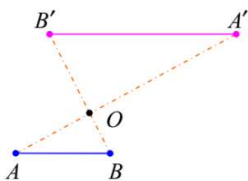
الف) نقطه O روی خط AB باشد.

در این حالت نقاط A', B' به ترتیب مجانس های A, B روی خط AB قرار می گیرند بنابراین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب حفظ می شود. ($\circ/۵$)



ب) نقطه O روی خط AB نباشد.

اگر نقاط A', B' به ترتیب مجانس های A, B باشند خواهیم داشت :

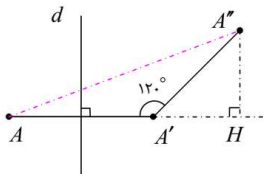


$$\left. \begin{array}{l} OA' = -k \times OA \\ OB' = -k \times OB \end{array} \right\} \rightarrow \frac{OA'}{OB'} = \frac{-k \times OA}{-k \times OB} = \frac{OA}{OB} \rightarrow \frac{OB}{OB'} = \frac{OA}{OA'}$$

پس طبق عکس قضیه تالس نتیجه می شود که $AB \parallel A'B'$ $\circ/۲۵$

تمرین ۱ صفحه ۵۰

$$\begin{aligned}
 A'A'' &= AA' = 4\sqrt{6} \text{ }^\circ/25 \\
 \widehat{A''A'H} &= 18^\circ - 12^\circ = 6^\circ \rightarrow \widehat{A'A''H} = 3^\circ \text{ }^\circ/25 \\
 A'H &= \frac{1}{2} A'A'' = 2\sqrt{6} \text{ }^\circ/25 \\
 A''H &= \frac{\sqrt{3}}{2} A'A'' = 2\sqrt{18} \text{ }^\circ/25 \\
 AA''^2 &= AH^2 + A''H^2, AH = 6\sqrt{6} \\
 &\rightarrow AA''^2 = (6\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{18})^2 \\
 &\quad \text{ }^\circ/25 \\
 &\rightarrow AA'' = \sqrt{288} = 12 \text{ }^\circ/25
 \end{aligned}$$



تمرین ۶ صفحه ۴۵

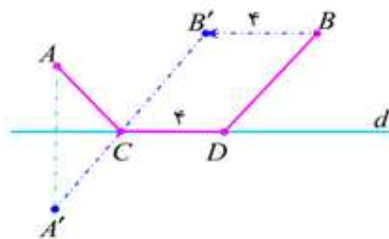
ابتدا از نقطه B به موازات رودخانه BB' را برابر ۴ کیلومتر رسم می‌کنیم. اکنون بازتاب A را نسبت به رودخانه پیدا کرده و آن را A' می‌نامیم، بعد نقطه A' را به B' وصل می‌کنیم تا نقطه C بدست آید. لذا جواب مسأله بدین شکل است از A به C سپس از C در امتداد رودخانه به طول ۴ کیلومتر حرکت کرده تا به D برسیم سپس از D به B موازات CB' حرکت می‌کنیم. $ACDB$ جواب مسأله است.

شکل یا توضیحات ۱ نمره

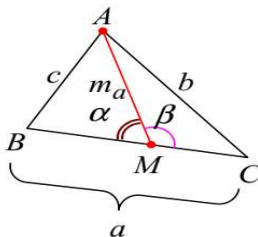
$A'B'$ کوتاهترین مسیر بین A' و B' است پس ACB' کوتاهترین مسیر از A به رودخانه سپس به B' است. چهار ضلعی $CDBB'$ متوازی الاضلاع است. $A'B' = AC + DB \rightarrow A'B' + CD = AC + DB + CD$

نشان دادن کوتاهترین مسیر به صورت فوق ۵/۰ نمره

(مسأله قسمت ب صفحه ۵۵)



به اثبات‌های دیگر نیز نمره اختصاص داده شود.



$$\beta = 18^\circ - \alpha \rightarrow \cos \beta = -\cos \alpha \text{ }^\circ/25$$

$$\triangle AMC: b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 + am_a \cos \alpha \text{ (۱) }^\circ/5$$

$$\triangle ABM: c^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - am_a \cos \alpha \text{ (۲) }^\circ/5$$

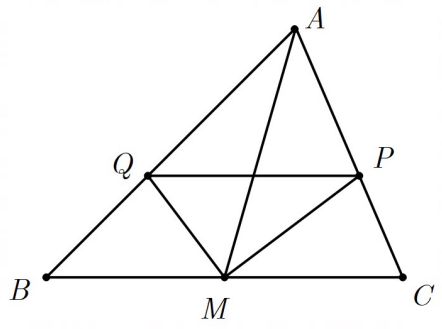
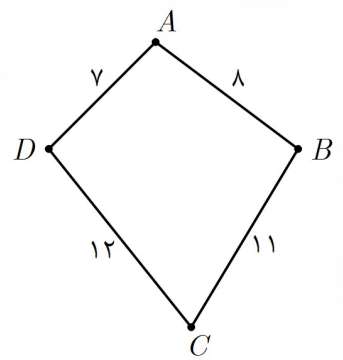
با جمع کردن روابط (۱) و (۲) داریم: $^\circ/25$

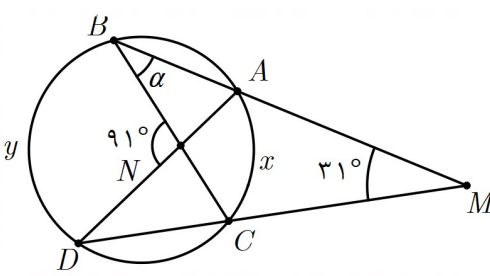
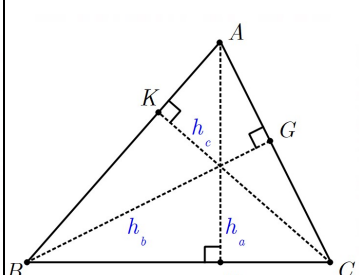
$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$$

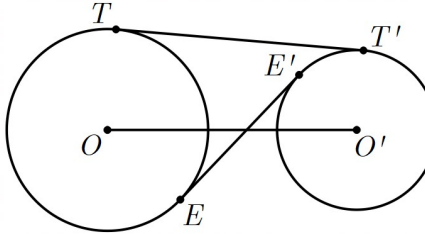
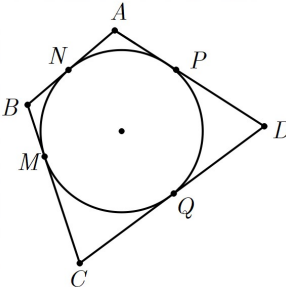
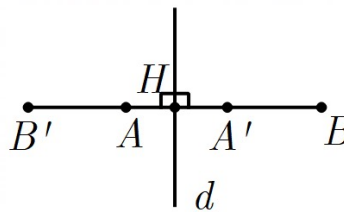
تمرین ۴ صفحه ۶۹

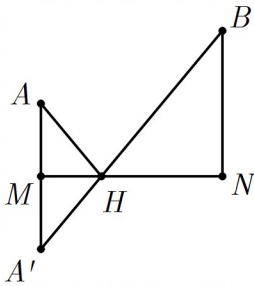
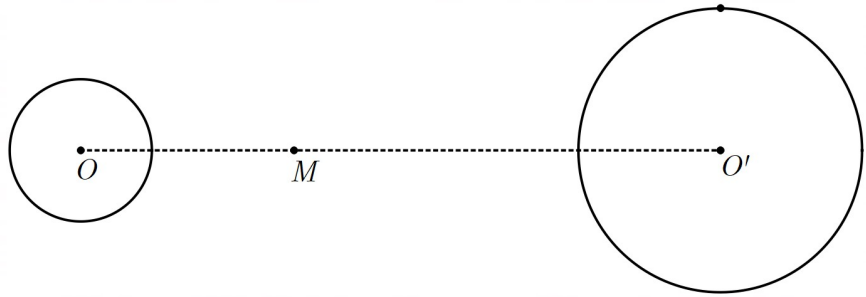
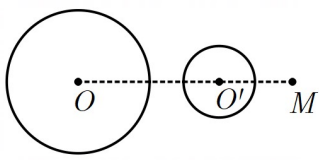
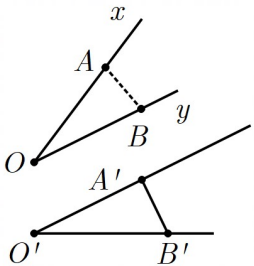
۱/۵	$\frac{c}{x} = \frac{b}{y} \rightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{y}; \circ/۵$ $\rightarrow \frac{y}{x} = \frac{5}{3} \rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{8}{3} \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{5}{3} \rightarrow x = \frac{21}{8}, y = \frac{35}{8}$ $AD = \sqrt{bc - xy} = \sqrt{15 - \frac{735}{64}} = \sqrt{\frac{225}{64}} = \frac{15}{8}$	۱۲
۱/۵	کار در کلاس صفحه (۷۵) $p = \frac{3+5+7}{2} = \frac{15}{2}; \circ/۲۵$ $S = \sqrt{\frac{15}{2}(\frac{15}{2} - 3)(\frac{15}{2} - 5)(\frac{15}{2} - 7)} = \frac{15}{4}\sqrt{3}; \circ/۵$ $S = \frac{1}{2}(5)(3) \sin A \rightarrow \frac{15}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2}(5)(3) \sin A$ $\rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \hat{A} = 60^\circ, 120^\circ$	۱۳
۱/۵	در این حالت قطر BD را رسم می کنیم و A را به D وصل می کنیم. پس $\hat{D} = \hat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2}, \widehat{BAD} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ; \circ/۵$ بنابراین طبق حالت قبل داریم: $\frac{c}{\sin C} = BD = 2R; \circ/۲۵$ به طریق مشابه خواهیم داشت: $\frac{a}{\sin A} = 2R, \frac{b}{\sin B} = 2R; \circ/۲۵$ (فعالیت ۳ صفحه ۶۳) شکل ۲۵، ۰	۱۴

سؤالات آزمون درس: هندسه ۲	پایه: یازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: خرداد - شهریور	شماره ۱۰
ردیف	سؤالات پاسخ‌برگ دارد - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			
۱	جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند را زاویه می‌نامند. ب) یک چند ضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه باشند. پ) شیب خط پاره خط AB و تصویر آن نسبت به خط بازتاب d باهم برابرند، هرگاه پاره خط AB و خط d باهم باشند. ت) در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته‌ی آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، نقطه تبدیل می‌نامند.			
۲	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر دو زاویه‌ی مقابل در یک چهارضلعی متمم باشند، آنگاه آن چهارضلعی محاطی است. ب) تبدیل‌های دوران و انتقال موقعیت شکل‌ها را <u>تغییر نمی‌دهند</u>. پ) دو شکل متشابه الزاماً متجانس نیستند. ت) در مثلث ABC، اگر $AB = ۱۰$ و $A = ۳۰^\circ$، آنگاه شعاع دایره محیطی مثلث ABC برابر ۱۰ است. ث) مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصلضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.			
۳	در سؤالات زیر گزینه درست را مشخص کنید. ۱) در چند مورد از تبدیل‌های بازتاب، دوران، تجانس و انتقال، مساحت شکل حفظ می‌شود؟ الف) ۲ مورد ب) ۳ مورد ج) ۴ مورد د) ۱ مورد ۲) مساحت مثلثی با اضلاع به طول‌های ۱۴، ۱۳ و ۱۵ برابر کدام است؟ الف) ۸۴ ب) ۸۰ ج) ۷۰ د) ۷۴			
۴	در دایره‌ای به شعاع ۶ سانتی متر، اندازه کمان $\widehat{AB} = ۴۵^\circ$ می‌باشد. طول کمان $\widehat{AB}$ و مساحت قطاع OAB را به‌دست آورید.			
۵	در شکل زیر، اندازه زاویه α را به‌دست آورید.			
۶	مثلثی به طول اضلاع a، b و c با شعاع دایره محاطی داخلی به اندازه r و سه ارتفاع به طول‌های h_a، h_b و h_c را در نظر بگیرید. نشان دهید: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$			

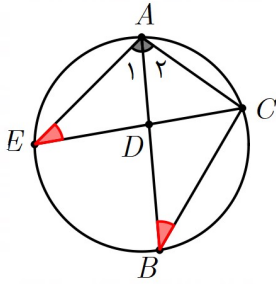
۱/۵	۱۴ در مثلث ABC، نقطه M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید $PQ \parallel BC$. 	۱۴
۱/۷۵	۱۵ در شکل زیر $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$ است. مساحت چهارضلعی $ABCD$ را به دست آورید. 	۱۵
۲۰	موفق باشید	جمع

راهنمای نمره گذاری آزمون درس : هندسه ۲		پایه: یازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: خرداد - شهریور	شماره ۱۰
ردیف	راهنمای نمره گذاری				
۱	الف) محاطی ص ۱۲ (۰/۲۵) ب) همرس ص ۲۴ (۰/۲۵) پ) موازی ص ۳۷ (۰/۲۵) ت) ثابت ص ۳۶ (۰/۲۵)				
۲	الف) نادرست ص ۲۷ (۰/۲۵) ب) نادرست ص ۳۴ (۰/۲۵) پ) درست ص ۴۷ (۰/۲۵) ت) درست ص ۶۲ (۰/۲۵) ث) درست ص ۷۴ (۰/۲۵)				
۳	(۱) گزینه ب ص ۴۸ (۰/۵) (۲) گزینه الف ص ۷۱ (۰/۵)				
۴	$\widehat{AB} \text{ طول کمان } = \frac{\pi R}{180^\circ} \alpha = \frac{6\pi}{180} \times 45 = \frac{3\pi}{2}$ $\text{مساحت قطاع} = \frac{\pi R^2}{360} \times \alpha = \frac{(36)(45)\pi}{360} = \frac{9\pi}{2}$ ص ۱۲				
۵	 $\hat{N} = \frac{y+x}{2}, \quad \hat{M} = \frac{y-x}{2}$ $\begin{cases} y-x = 62^\circ \\ y+x = 182^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 60^\circ (0/25) \Rightarrow \alpha = 30^\circ (0/25)$ ص ۱۶				
۶	$S = \frac{1}{2} a \times h_a = \frac{1}{2} b \times h_b = \frac{1}{2} c \times h_c \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}, h_b = \frac{2S}{b}, h_c = \frac{2S}{c}$ $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2P}{2S} = \frac{1}{r}$  ص ۳۰				

۱/۵	$TT' = ۳\sqrt{۷}, EE' = \sqrt{۱۵}, d = OO' = ۸$ $TT' = ۳\sqrt{۷} = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} \Rightarrow ۶۳ = ۶۴ - (R - R')^۲ \Rightarrow \underbrace{R - R' = \pm ۱}_{\circ/۲۵}$ $EE' = \sqrt{۱۵} = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲} \Rightarrow ۱۵ = ۶۴ - (R + R')^۲ \Rightarrow \underbrace{R + R' = \pm ۷}_{\circ/۲۵}$ $\underbrace{R = ۴, R' = ۳}_{\circ/۲۵} \text{ یا } \underbrace{R' = ۴, R = ۳}_{\circ/۲۵}$  ص ۲۲	۷
۱/۲۵	اگر از یک نقطه بیرون دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم، آنگاه طول آنها یکسان است. (۰/۲۵) $\begin{cases} AN = AP \\ BN = BM \\ CQ = CM \\ DQ = DP \end{cases} \Rightarrow \underbrace{AN + BN}_{AB} + \underbrace{DQ + CQ}_{DC} = \underbrace{AP + DP}_{AD} + \underbrace{BM + MC}_{BC}$  $\underbrace{AB + DC = BC + AD}_{\circ/۲۵}$ ص ۲۷	۸
۱/۷۵	 $\underbrace{B'H = BH}_{\circ/۲۵}, \underbrace{AH' = AH}_{\circ/۲۵}$ $\underbrace{B'A + AH}_{\circ/۲۵} = \underbrace{BA' + A'H}_{\circ/۲۵} \Rightarrow \underbrace{BA' = B'A}_{\circ/۲۵}$ $\underbrace{AB = AA' + A'B}_{\circ/۲۵} \Rightarrow AB = A'B' \text{ (} \circ/۲۵ \text{)}$ $\underbrace{A'B' = AA' + AB'}_{\circ/۲۵}$ ص ۴۲	۹

۰/۷۵	۱۰ تصویر نقطه A را با تبدیل بازتاب نسبت به پاره خط MN، نقطه A' می‌نامیم (۰/۲۵). پاره خط $A'B$ در نقطه H پاره خط MN را قطع می‌کند. مسیر AHB پاسخ می‌باشد (۰/۲۵) کامل کردن شکل (۰/۲۵) ص ۵۲ 	۱۰
الف) ۱ ب)	(۰/۵)  (۰/۵)  ص ۴۴	۱۱
۱	۱۲ اگر T یک تبدیل طولی، $x\hat{O}y$ یک زاویه دلخواه، $T(A) = A'$، $T(B) = B'$ و $T(O) = O'$، آنگاه $\begin{array}{l} AB = A'B' \\ OA = O'A' \Rightarrow \underbrace{\triangle ABO \cong \triangle A'B'O'}_{\text{۰/۲۵}} \Rightarrow \underbrace{\hat{AOB} = \hat{A'O'B'}}_{\text{۰/۲۵}} \\ OB = O'B' \end{array}$ رسم شکل (۰/۲۵) ص ۳۴ 	۱۲

نیمساز زاویه $\widehat{A}$ یعنی AD را طوری امتداد می دهیم تا دایره محیطی مثلث را در نقطه B قطع کند. B را به C وصل می کنیم. زاویه های $\widehat{E}$, $\widehat{B}$ هر دو محاطی



$$\widehat{B} = \widehat{E} = \frac{\widehat{AC}}{2} \quad \text{و رو به رو به یک کمان هستند،}$$

۰/۲۵

$$\triangle ABC \sim \triangle AED \Rightarrow \frac{BC}{ED} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE}$$

۰/۲۵

$$\Rightarrow AC \times AE = AD \times AB =$$

۰/۲۵

$$AD \times (AD + DB) = AD^2 + AD \times DB$$

۰/۲۵

$$AD \times DB = ED \times DC \Rightarrow$$

۰/۲۵

$$AC \times AE = AD^2 + ED \times DC \Rightarrow AD^2 = AC \times AE - ED \times DC$$

۰/۲۵

ص ۶۹

۱/۲۵

MQ نیمساز زاویه AMB است. بنابراین:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB} \xrightarrow[\text{(۰/۲۵)}]{MB=MC} \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QB}$$

۰/۲۵

$$\frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC} \quad \text{در نتیجه} \quad \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC}$$

۰/۲۵

$$. \quad PQ \parallel BC \quad \text{اکنون طبق عکس قضیه تالس}$$

۰/۲۵

ص ۷۰

۱/۵

$$\underbrace{BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AB \times AD \times \cos 120^\circ}_{\circ/۲۵} \Rightarrow \underbrace{BD^2 = ۶۴ + ۴۹ - ۲(۸)(۷)(\frac{-1}{۲})}_{\circ/۲۵} = ۱۶۹$$

$$\Rightarrow \underbrace{BD = ۱۳}_{\circ/۲۵}$$

$$\underbrace{S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times AD \times AB \times \sin 120^\circ = ۱۴\sqrt{۳}}_{\circ/۲۵}$$

۱/۷۵

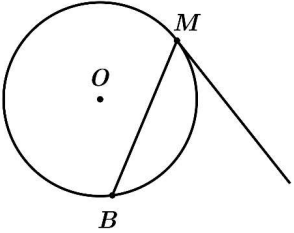
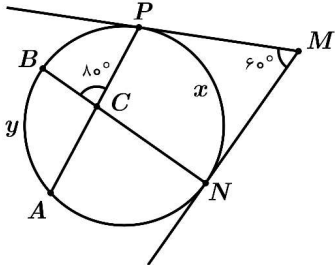
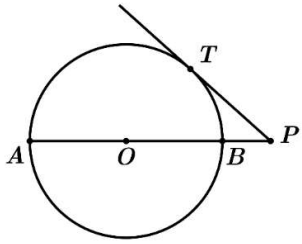
$\triangle BCD$ نصف محیط مثلث

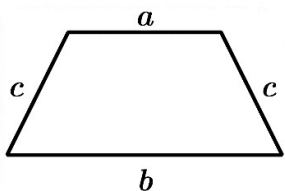
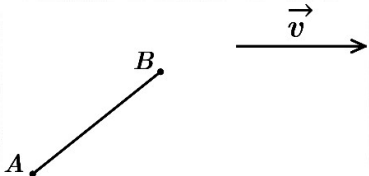
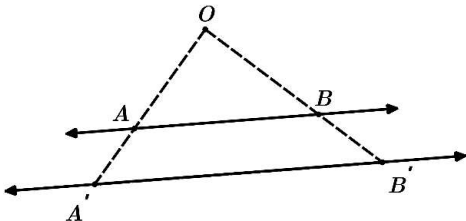
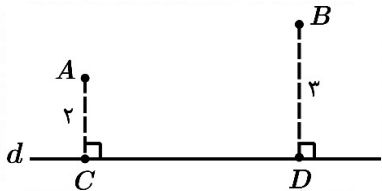
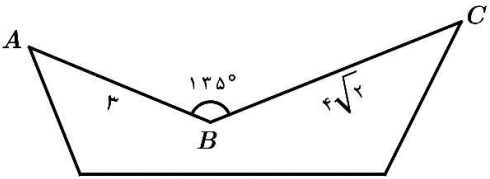
$$= P = \underbrace{\frac{۱۲+۱۱+۱۳}{۲}}_{\circ/۲۵} = ۱۸ \Rightarrow \underbrace{S_{\square BCD} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}_{\circ/۲۵} = ۶\sqrt{۱۰۵}$$

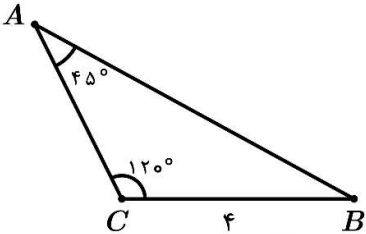
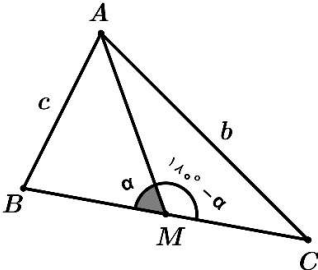
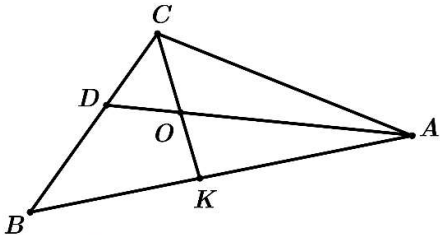
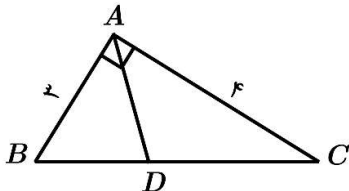
$$\underbrace{S_{ABCD} = ۱۴\sqrt{۳} + ۶\sqrt{۱۰۵}}_{\circ/۲۵}$$

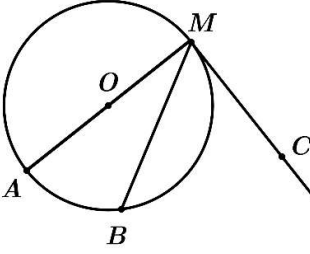
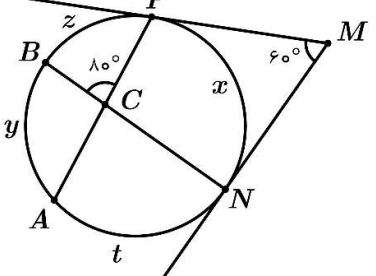
ص ۷۲

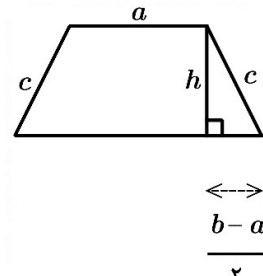
سپاس و خداقوت خدمت همکار گرامی

سؤالات آزمون درس: هندسه ۲	پایه: یازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: خرداد - شهریور	شماره ۱۱
ردیف	سؤالات پاسخ‌برگ دارد - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند، زاویه محاطی است. ب) دو دایره متداخل، یک مماس مشترک دارند. ج) تبدیل تجانس، مساحت شکل را همواره حفظ می‌کند. د) در تبدیل انتقال غیرهمانی، نقطه ثابت تبدیل وجود ندارد.			
۲	عبارت درست را از داخل پرانتز انتخاب کنید. الف) طول کمانی از یک دایره به شعاع ۳ واحد و اندازه 60° برابر واحد است. $(\pi, 3\pi)$ ب) دو دایره با شعاع‌های ۲ و ۳ واحد و طول خط‌المركزین ۶ واحد، نسبت به هم هستند. (متخارج، متقاطع) ج) شیب خط در تبدیل همواره حفظ می‌شود. (انتقال، دوران) د) مساحت مثلث به طول اضلاع ۱۳، ۱۴ و ۱۵ واحد، برابر واحد مربع است. $(84, 91)$			
۳	در شکل زیر O مرکز دایره است. ثابت کنید: اندازه زاویه ظلّی $\widehat{MB}$ برابر با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه است. 			
۴	در شکل زیر MP و MN بر دایره مماس‌اند. اندازه کمان‌های x و y را به دست آورید. 			
۵	در شکل زیر O مرکز دایره و $PO = 10$، $PB = 2$ و PT بر دایره مماس است. اندازه مماس PT را به دست آورید. 			
۶	طول شعاع‌های دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی ۲۴ و طول مماس مشترک داخلی آنها مساوی ۱۰ و طول خط‌المركزین آنها ۲۶ واحد است.			

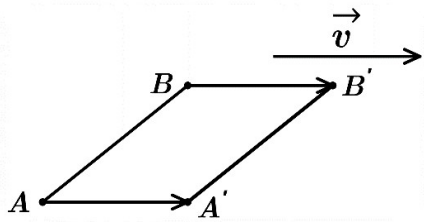
۷	دوزنقه متساوی الساقین زیر، محیطی است. ثابت کنید، مساحت این دوزنقه برابر $\frac{a+b}{2}\sqrt{ab}$ واحد مربع است. 	۱/۲۵
۸	در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، به طول اضلاع $a = 5$ و $c = 4$، $b = 3$، اندازه بزرگ ترین شعاع دایره محاطی خارجی متناظر با رئوس این مثلث را به دست آورید.	۵/۷۵
۹	با توجه به شکل نشان دهید، در تبدیل انتقال زیر، اندازه پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند. 	۱
۱۰	در حالتی که مرکز دوران O بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران α از زاویه $\hat{AOB}$ بیشتر باشد، ثابت کنید، اگر $A'B'$ دوران یافته پاره خط AB باشد، آنگاه $A'B'$ و AB هم اندازه‌اند.	۱
۱۱	مطابق شکل زیر، ثابت کنید در تبدیل تجانس در حالتی که نقطه O، مرکز تجانس روی خط AB واقع نیست، شیب خط AB حفظ می‌شود. 	۱
۱۲	با توجه به شکل زیر، فاصله دو نقطه C و D برابر ۵ واحد است. نقطه M، روی خط d را چنان در نظر بگیرید که مسیر AMB کوتاه ترین مسیر باشد. طول این مسیر را به دست آورید. 	۱/۵
۱۳	زمینی به شکل زیر داریم، می‌خواهیم بدون آنکه محیط این زمین تغییر کند، مساحتش را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت زمین را به دست آورید. 	۵/۷۵

۱۴	با توجه به مثلث ABC، مطابق شکل زیر، طول ضلع AB و شعاع دایره محیطی مثلث را به دست آورید. 	۱/۵
۱۵	در مثلث ABC، میانه AM را رسم کرده ایم. با نوشتن قضیه کسینوس ها در دو مثلث AMB و AMC، درستی تساوی زیر را ثابت کنید: $(BC = a)$ $b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$ 	۱/۵
۱۶	در مثلث ABC، $BC = 4$، $AC = 5$ و $AB = 6$ است. اگر دو نیمساز AD و CK یکدیگر را در نقطه O قطع کنند، آنگاه نسبت $\frac{KO}{OC}$ را به دست آورید. 	۱/۵
۱۷	الف) در مثلث ABC، به طول اضلاع $BC = 9$، $AC = 6$ و $AB = 10$، حاده (تند)، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه $\hat{A}$ را تعیین کنید. ب) در مثلث قائم الزاویه ABC، طول نیمساز AD را به دست آورید. 	۱/۲۵
۲۰	جمع	موفق باشید

شماره ۱۱		نوبت: خرداد - شهریور		رشته: ریاضی و فیزیک		پایه: یازدهم		راهنمای نمره گذاری آزمون درس : هندسه ۲	
نمره	راهنمای نمره گذاری								ردیف
۱	۲۲ فعالیت ۵ صفحه (۰/۲۵)		۱۲ صفحه (۰/۲۵)		الف) درست		۱		
	۵۰ فعالیت صفحه (۰/۲۵)		کاردرکلاس صفحه ۵۰ (د) درست		ج) نادرست				
۱	۲۰ جدول صفحه (۰/۲۵)		۱۲ صفحه ۳ (ب) متخارج		الف) π		۲		
	۷۳ مثال صفحه (۰/۲۵)		۸۴ (د) ۵۰ کاردرکلاس صفحه (۰/۲۵)		ج) انتقال				
۱/۵	۳ قطر AM را رسم می کنیم. در این صورت:  $\left. \begin{array}{l} \widehat{AMC} = 90^\circ \\ \widehat{MBA} = 18^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AMC} = \frac{1}{2} \widehat{MBA} = \frac{1}{2} (\widehat{MB} + \widehat{AB}) = \frac{1}{2} \widehat{MB} + \frac{1}{2} \widehat{AB}$ در نتیجه: $\widehat{AMB} + \widehat{BMC} = \frac{1}{2} \widehat{MB} + \frac{1}{2} \widehat{AB}$ با توجه به رابطه بالا و محاطی بودن زاویه $\widehat{AMB}$ که برابر نصف $\widehat{AB}$ است، داریم: (۰/۲۵) $\widehat{BMC} = \frac{1}{2} \widehat{MB}$ فعالیت صفحه ۱۴								۳
۱/۵	۴ با نام گذاری $\widehat{AN} = t$, $\widehat{BP} = z$ داریم:  $60^\circ = \frac{y + z + t - x}{2} \Rightarrow y + z + t - x = 120^\circ$ $80^\circ = \frac{z + t}{2} \Rightarrow z + t = 160^\circ$ در نتیجه: $x - y = 40^\circ$. با توجه به $x + y + z + t = 360^\circ$ داریم: (۰/۲۵) $x + y = 200^\circ$ با تشکیل دستگاه و حل آن داریم: $\begin{cases} x - y = 40^\circ \\ y + x = 200^\circ \end{cases} \Rightarrow x = 120^\circ, y = 80^\circ$ مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۶								۴
۰/۷۵	۵ با توجه به شکل، $PA = 18$ (۰/۲۵) و روابط طولی در دایره داریم: (۰/۲۵) $PT^2 = PA \times PB \Rightarrow PT^2 = 2 \times 18 \Rightarrow PT = 6$ قضیه صفحه ۱۹								۵

۱/۲۵	با توجه به رابطه طول مماس مشترک داخلی و خارجی، داریم: $\overbrace{24 = \sqrt{26^2 - (R - R')^2}}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow \overbrace{576 = 676 - (R - R')^2}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow R - R' = 10$ ۹ $\overbrace{10 = \sqrt{26^2 - (R + R')^2}}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow \overbrace{100 = 676 - (R + R')^2}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow R + R' = 24$ با حل دستگاه داریم: $R = 17, R' = 7$ $\overbrace{(۰/۲۵)}$ مشابه تمرین ۵ صفحه ۲۳	۶
۱/۲۵	رسم شکل $(۰/۲۵)$  با رسم ارتفاع دوزنقه، در مثلث قائم الزاویه ایجاد شده، داریم: $\overbrace{a + b = c + c}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow c = \frac{a + b}{2}$ در نتیجه، مساحت دوزنقه، برابر است با: $\overbrace{c^2 = h^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow \overbrace{h^2 = \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow h = \sqrt{ab}$ $\overbrace{s = \frac{(a+b)h}{2}}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow s = \frac{a+b}{2} \sqrt{ab}$ تمرین ۴ صفحه ۲۹	۷
۰/۷۵	در این مثلث قائم الزاویه با مساحت S و محیط $2P$ داریم: $\overbrace{S = 6, P = 6}^{(۰/۲۵)}$ اندازه بزرگ ترین شعاع دایره محاطی خارجی، نظیر بزرگ ترین زاویه مثلث $(\hat{A} = 90^\circ)$ است: $(۰/۲۵)$ $\overbrace{r_a = \frac{S}{P-a}}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow r_a = \frac{6}{6-5} = 6$ فعالیت صفحه ۲۶	۸

با توجه به شکل زیر و تعریف انتقال داریم:

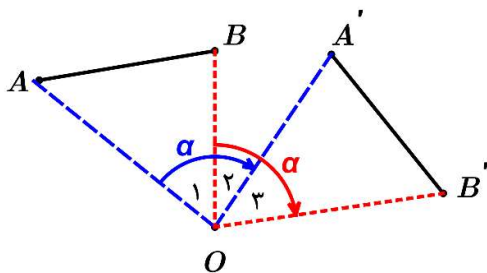


$$\overbrace{AA' \parallel BB' \parallel v}^{(0/25)} \text{ و } \overbrace{AA' = BB' = v}^{(0/25)}$$

که نشان می‌دهد در چهارضلعی $AA'B'B$ دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی هستند، در نتیجه این چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است. $(0/25)$
در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو، با هم برابر هستند: $AB = A'B'$. $(0/25)$

فعالیت صفحه ۴۱

با توجه به شکل داریم:



$$\overbrace{\begin{aligned} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 &= \alpha \\ \hat{O}_2 + \hat{O}_3 &= \alpha \end{aligned}}^{(0/25)} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

$\overbrace{OA = OA', OB = OB'}^{(0/25)}$ با توجه به تعریف دوران داریم:

رسم شکل $(0/25)$

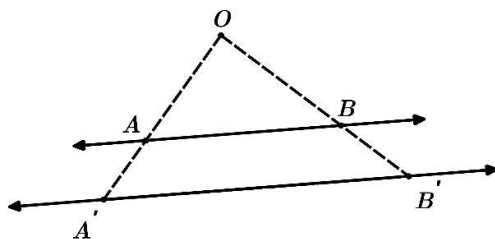
در نتیجه:

$(0/25)$

$$\begin{aligned} OA &= OA' \\ \hat{O}_1 &= \hat{O}_3 \\ OB &= OB' \end{aligned} \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OA'B' \Rightarrow AB = A'B'$$

فعالیت صفحه ۴۳

طبق تعریف تجانس، داریم:



$$\overbrace{\begin{cases} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{cases}}^{(0/5)} \Rightarrow \overbrace{\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k}^{(0/25)}$$

حال با توجه به عکس قضیه تالس در مثلث $OA'B'$ داریم:

$$(0/25) \quad AB \parallel A'B'$$

یعنی، تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

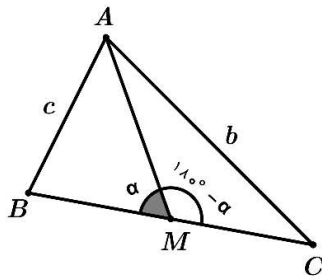
فعالیت صفحه ۴۸

۱/۵	بازتاب نقطه A، نسبت به خط d را نقطه A' می‌نامیم. (۰/۲۵) محل برخورد پاره خط $A'B$ با خط d همان نقطه M است. (۰/۲۵) با توجه به طولپایایی تبدیل بازتاب داریم: $AM = A'M$ (۰/۲۵) رسم شکل (۰/۲۵) در این صورت طول مسیر AMB برابر است با: $AM + MB = A'M + MB = A'B \quad (۰/۲۵)$ با توجه به شکل، در مثلث قائم‌الزاویه $A'BB'$ طبق رابطه فیثاغورس داریم: $A'B^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow A'B = 5\sqrt{2} \quad (۰/۲۵)$ سوال صفحه ۵۴	۱۲
۰/۷۵	میزان افزایش مساحت زمین برابر است با: $\overbrace{2\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4\sqrt{2} \times \sin(135^\circ)\right)}^{(۰/۵)} = \overbrace{12\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}^{(۰/۲۵)} = 12$ تمرین ۵ صفحه ۵۶	۱۳
۱/۵	با استفاده از قضیه سینوس‌ها: $\overbrace{\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{4}{\sin 45^\circ}}^{(۰/۵)} \Rightarrow \overbrace{AB = 2\sqrt{6}}^{(۰/۲۵)}$ $\overbrace{\frac{BC}{\sin \hat{A}} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\sin 45^\circ} = 2R}^{(۰/۵)} \Rightarrow \overbrace{R = 2\sqrt{2}}^{(۰/۲۵)}$ مشابه مثال ۱ صفحه ۶۲	۱۴

با استفاده از قضیه کسینوس ها در مثلث ABM داریم:

(۰/۲۵)

$$c^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cdot \cos \alpha \quad (۱)$$



با استفاده از قضیه کسینوس ها در مثلث ACM داریم:

(۲)

۱/۵

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

$$b^2 = AM^2 + CM^2 - 2AM \cdot CM \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \Rightarrow b^2 = AM^2 + CM^2 + 2AM \cdot CM \cdot \cos \alpha$$

با توجه به میانه بودن AM داریم: $BM = CM = \frac{a}{2}$ (۰/۲۵)

حال با جمع کردن طرفین رابطه های (۱) و (۲) داریم:

(۰/۲۵)

(۰/۲۵)

$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$$

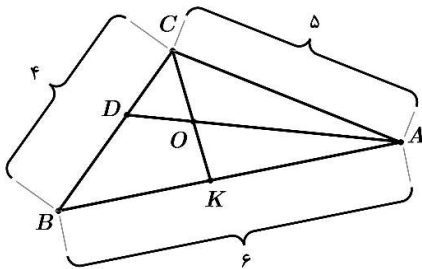
تمرین ۴ صفحه ۶۹

در مثلث ABC ، CK نیمساز زاویه $\hat{C}$ است. با فرض $AK = x$ داریم $BK = 6 - x$ در نتیجه:

(۰/۵)

(۰/۲۵)

$$\frac{AK}{BK} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{x}{6-x} = \frac{5}{4} \Rightarrow AK = x = \frac{30}{9}$$



۱/۵

در مثلث ACK ، AO نیمساز زاویه $\hat{A}$ است، (۰/۲۵) در نتیجه:

(۰/۲۵)

$$\frac{KO}{OC} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow \frac{KO}{OC} = \frac{\frac{30}{9}}{5} = \frac{2}{3}$$

مشابه تمرین ۲ صفحه ۷۰

الف) با توجه به: $a^2 = 81, b^2 + c^2 = 100 + 36 = 136$ (۰/۲۵)

داریم: $a^2 < b^2 + c^2$ (۰/۲۵)

در نتیجه زاویه $\hat{A}$ ، یک زاویه حاده (تند) است. (۰/۲۵)

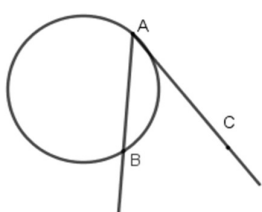
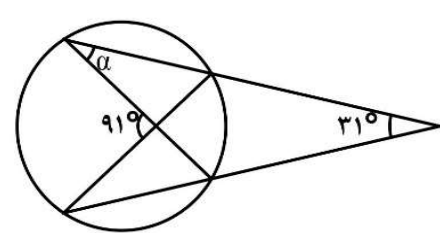
ب) با توجه به رابطه زیر، داریم:

$$AD = \frac{2AB \cdot AC \cdot \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{AB + AC} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{3 + 4} \Rightarrow AD = \frac{12\sqrt{2}}{7}$$
(۰/۲۵)

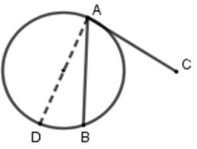
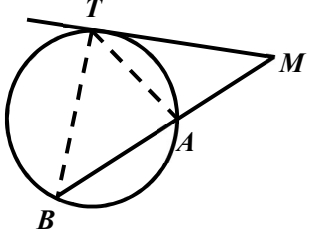
مثال صفحه ۷۱

تمرین ۵ صفحه ۷۵

۱/۲۵

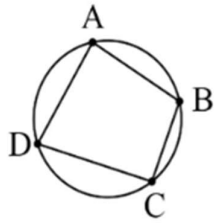
سؤالات آزمون درس : هندسه ۲	پایه: یازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: خرداد - شهریور	شماره ۱۲
ردیف	سؤالات پاسخ برگ دارد- استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. الف) تنها یک نقطه در صفحه وجود دارد که از سه راس مثلث به یک فاصله است. ب) کایت یک چهار ضلعی محیطی است. پ) تبدیل بازتاب، جهت شکل را حفظ می کند. ت) در هر تبدیل دلخواه T ، اگر $T(A) = A'$ آنگاه $T(A') = A$.			
۲	در هر قسمت، پاسخ مناسب را بنویسید. الف) دو دایره به طول شعاع های ۳ و ۶ سانتی متر و طول خط المרכזین ۴ سانتی متر، نسبت به هم هستند. (مماس بیرون، متقاطع، متخارج) ب) تبدیلی که همواره شیب خط را حفظ می کند، نام دارد. (دوران، انتقال، بازتاب) پ) ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع، یک است. (دوران، انتقال، بازتاب) ت) در هر مثلث قائم الزاویه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه رو به رو به آن ضلع برابر با اندازه است. (شعاع دایره محاطی، شعاع دایره محیطی، وتر)			
۳	با توجه به شکل، ثابت کنید اندازه زاویه ظلی برابر است با نصف کمان روبه رو به آن زاویه.			
۱/۵				
۴	نشان دهید هرگاه M نقطه ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازه مماس برابر است با حاصل ضرب اندازه های دو قطعه قاطع.			
۱/۵				
۵	در شکل مقابل، اندازه زاویه α را به دست آورید.			
۱/۲۵				
۶	ثابت کنید اگر یک چهارضلعی محاطی باشد، آنگاه دو زاویه مقابل آن مکمل هستند.			
۱/۲۵				
۷	مثلث متساوی الاضلاع با طول ضلع $\sqrt{3}$ را در نظر بگیرید. شعاع دایره محاطی آن را محاسبه کنید.			
۰/۷۵				
۸	در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم اندازه اند.			
۱/۲۵				

۹	در شکل زیر، نشان دهید دوران با مرکز O ، تبدیلی طولیا است. (زاویه دوران از زاویه $\widehat{AOB}$ بزرگ تر است).	۱/۵
۱۰	در تجانسی به مرکز O و نسبت $k = -\frac{5}{2}$ ، اگر $OA = 8$ باشد، فاصله نقطه A از تصویرش را بیابید.	۰/۵
۱۱	در شکل زیر نقطه M را روی پاره خط HK طوری بیابید که مسیر AMB کوتاه ترین مسیر باشد.	۰/۷۵
۱۲	در شکل زیر، با ثابت نگه داشتن محیط، حداکثر چه مقدار می توان مساحت را افزایش داد؟ ($\hat{B} = 135^\circ$ و $BC = 4\sqrt{2}$ ، $AB = 3$)	۱
۱۳	در مثلث ABC ، داریم $BC = 10$ و $\hat{A} = 12^\circ$ و $AC = \frac{10\sqrt{6}}{3}$. اندازه زاویه $\hat{B}$ را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۱۴	در مثلث ABC که در آن $\hat{A} > 90^\circ$ ثابت کنید: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$.	۱/۵
۱۵	در مثلث ABC ، $AB = 7$ و $AC = 4$ و $BC = 10$ است. الف) طول نیمساز داخلی زاویه C را بیابید. ب) طول میانه وارد بر ضلع BC را محاسبه کنید.	۱/۵ ۰/۷۵
۱۶	در مثلث ABC به اضلاع ۵، ۶ و ۷ سانتی متر، نقطه ای که از اضلاع به طول های ۵ و ۶، به ترتیب به فاصله ۲ و ۳ سانتی متر باشد، از ضلع بزرگ تر چه فاصله ای دارد؟	۱/۷۵
موفق باشید		۲۰

شماره ۱۲	نوبت: خرداد - شهریور	رشته: ریاضی و فیزیک	پایه: یازدهم	راهنمای نمره گذاری آزمون درس: هندسه ۲
نمره	راهنمای نمره گذاری			ردیف
۱	هر قسمت (۲۵/۰ نمره) الف) درست ب) درست پ) نادرست ت) نادرست			۱
۱	هر قسمت (۲۵/۰ نمره) الف) متقاطع ب) انتقال پ) دوران ت) وتر (یا دو برابر شعاع دایره محیطی)			۲
۱/۵	قطری از دایره که شامل A است را رسم می کنیم. ۲۵/۰  $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{DAC} = 90^\circ = \frac{1}{2} \widehat{DBA} \\ \widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{DB} \end{array} \right. \rightarrow \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{DBA} - \frac{1}{2} \widehat{DB} = \frac{1}{2} \widehat{BA}$ ۷۵/۰ (ص ۱۴)			۳
۱/۵	 $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{MTA} = \frac{\widehat{AT}}{2} \\ \widehat{MBT} = \frac{\widehat{AT}}{2} \end{array} \right. \rightarrow \widehat{MTA} = \widehat{MBT}$ ۲۵/۰ $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{MTA} = \widehat{MBT} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array} \right. \rightarrow \triangle MTA \simeq \triangle MBT \rightarrow \frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB} \rightarrow MT^2 = MA \times MB$ ۲۵/۰ ۲۵/۰ ۲۵/۰ (ص ۱۸)			۴
۱/۲۵	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(y+x) = 91^\circ \\ \frac{1}{2}(y-x) = 31^\circ \end{array} \right. \rightarrow \underbrace{x = 60^\circ}_{(0/25)} \rightarrow \underbrace{\alpha = \frac{1}{2}x}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{\alpha = 30^\circ}_{(0/25)}$ (ص ۱۶)			۵

فرض رئوس A, B, C و D روی دایره هستند. ۰/۲۵

۱/۲۵



$$\begin{cases} \hat{A} = \frac{1}{2} \widehat{BCD} \\ \hat{C} = \frac{1}{2} \widehat{DAB} \end{cases} \rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{1}{2} \widehat{BCD} + \frac{1}{2} \widehat{DAB} = \frac{1}{2} 360^\circ = 180^\circ$$

۰/۲۵

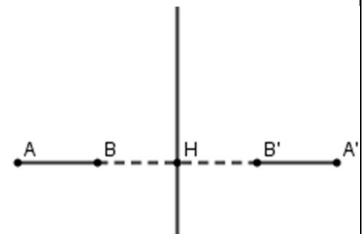
به طور مشابه $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ (ص ۲۷) ۰/۲۵

۰/۷۵

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{3}a^2}{4}}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{3}a}{6} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} \quad (\text{ص ۲۵})$$

۰/۲۵

طبق تعریف بازتاب، محور بازتاب عمود منصف AA' و BB' است. پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، در نتیجه تصویر آن، در راستای عمود بر خط بازتاب و در امتداد AB قرار می گیرد. ۰/۵



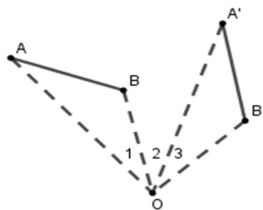
۱/۲۵

$$\begin{cases} AH = A'H \\ BH = B'H \end{cases} \rightarrow AH - BH = A'H - B'H \rightarrow AB = A'B'$$

۰/۲۵

(ص ۴۲)

فرض کنیم تبدیل یافته نقطه A ، نقطه A' و تبدیل یافته نقطه B ، نقطه B' باشد. ۰/۲۵

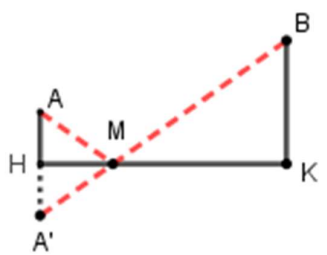
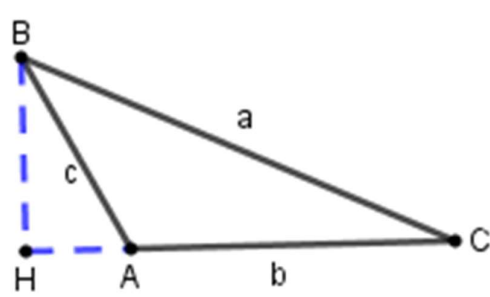


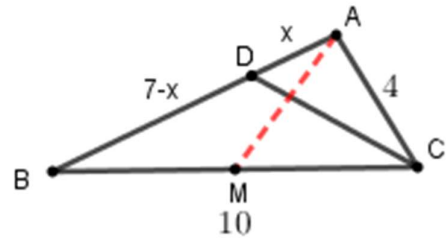
۱/۵

$$\begin{cases} OA = OA' \\ OB = OB' \end{cases} \rightarrow \triangle AOB \cong \triangle A'OB' \rightarrow AB = A'B' \quad (\text{ص ۴۱})$$

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O}_2 + \hat{O}_3 \rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

۰/۲۵

۰/۵	$۸ \times \frac{۵}{۲} + ۸ = ۲۸$ (ص ۴۳) ۰/۵	۱۰
۰/۷۵	بازتاب نقطه A را نسبت به محور HK نقطه A' می نامیم. محل تلاقی A'B با HK را M می نامیم. مسیر AMB پاسخ مساله است. ۰/۲۵ رسم شکل زیر ۰/۵  (ص ۵۲)	۱۱
۱	با استفاده از بازتاب ۰/۲۵ افزایش مساحت برابر است با $\underbrace{۲ \times S_{\triangle ABC}}_{۰/۲۵} = \underbrace{۲ \times \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴\sqrt{۲} \times \sin(۱۳۵^\circ)}_{۰/۲۵} = \underbrace{۱۲}_{۰/۲۵}$ (ص ۵۴)	۱۲
۱/۲۵	$\underbrace{\frac{۱^\circ}{\sin ۱۲^\circ}}_{۰/۵} = \frac{۱^\circ \sqrt{۶}}{۳} \Rightarrow \underbrace{\frac{۱^\circ}{\sqrt{۳}}}_{۰/۲۵} = \frac{۱^\circ \sqrt{۶}}{۳ \sin \hat{B}} \Rightarrow \underbrace{\sin \hat{B} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}}_{۰/۲۵} \Rightarrow \underbrace{\hat{B} = ۴۵^\circ}_{۰/۲۵}$ (ص ۶۲)	۱۳
۱/۵	 $BC^2 = BH^2 + CH^2 = \underbrace{(AB^2 - AH^2)}_{۰/۵} + (AC + AH)^2$ $\rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 + \underbrace{۲ \times AC \times AH}_{۰/۲۵},$ $\underbrace{AH = \cos(۱۸^\circ - \hat{A}) \times AB}_{۰/۵} = -\cos \hat{A} \times AB \rightarrow \underbrace{a^2 = b^2 + c^2 - ۲b.c.\cos \hat{A}}_{۰/۲۵}$ (ص ۶۴)	۱۴



$$\frac{CA}{CB} = \frac{AD}{BD} \rightarrow \frac{4}{10} = \frac{x}{7-x} \rightarrow \underbrace{x = AD = 2}_{\div 5}, \underbrace{BD = 5}_{\div 25} \quad \underbrace{BD = 5}_{\div 25}$$

$$\underbrace{DC^2 = 4 \times 10 - 5 \times 2 = 30}_{\div 25} \rightarrow \underbrace{DC = \sqrt{30}}_{\div 25}$$

(ص ۶۸)

ب) طبق قضیه میانه ها داریم:

$$\underbrace{4^2 + 7^2 = 2AM^2 + \frac{10^2}{2}}_{\div 5} \rightarrow \underbrace{AM = \sqrt{\frac{15}{2}}}_{\div 25}$$

(ص ۶۷)

مساحت را از دستور هرون و افراز به سه مثلث، محاسبه می کنیم و برابر قرار می دهیم.

$$\underbrace{p = 9 \rightarrow S = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}}_{\div 5}$$

$$\underbrace{6\sqrt{6} = 14 + \frac{7}{2} \times h}_{\div 5} \rightarrow \underbrace{h = \frac{2}{7}(6\sqrt{6} - 14)}_{\div 5} \quad \underbrace{S = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 + \frac{1}{2} \times 3 \times 6 + \frac{1}{2} \times h \times 7}_{\div 5} \rightarrow$$

$$\underbrace{6\sqrt{6} = 14 + \frac{7}{2} \times h}_{\div 25} \rightarrow \underbrace{h = \frac{2}{7}(6\sqrt{6} - 14)}_{\div 25}$$

(ص ۷۴)

سپاس و خداقوت خدمت همکار گرامی