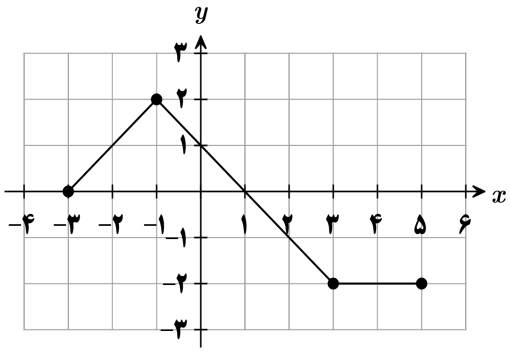
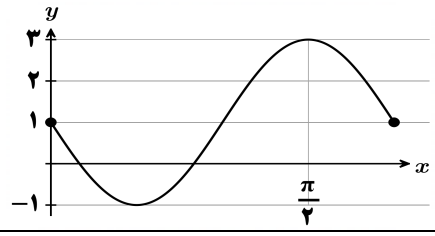
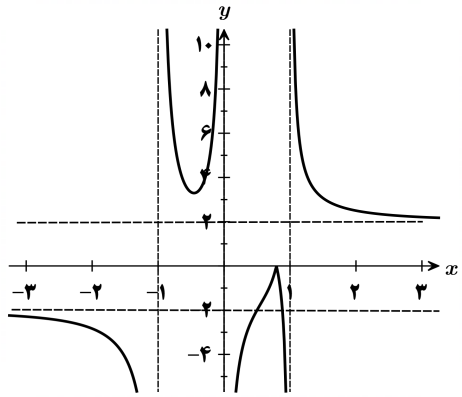
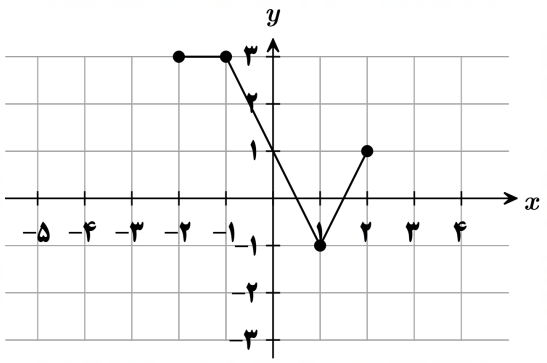
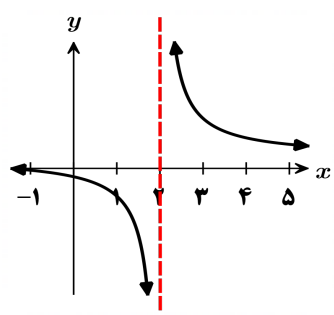
سؤالات آزمون درس : حسابان ۲	پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: اردیبهشت ماه (شبه نهایی ۴۰۵)	شماره ۱

ردیف	سؤالات پاسخ‌برگ دارد- استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) نمودار تابع $y = x^{۲}$ در بازهٔ $(۰,۱)$ زیر نمودار تابع $y = x^{۳}$ است. ب) عبارت $x^{۸} + y^{۸}$ بر عبارت $x - y$ بخش‌پذیر است. ج) تابع $f(x) = ۳$ یک مجانب افقی دارد. د) اگر برای تابع f داشته باشیم $f'(a) = ۰$، آنگاه a نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع است.	۱
۲	جاهای خالی را با توجه به عبارت‌های داخل کمانک کامل کنید. الف) معادلهٔ $\cos x = ۰$ در بازهٔ $\left[۰,۲\pi\right]$ دارای ..... جواب است. (یک – دو – سه – چهار) ب) یک تابع می‌تواند ..... مجانب قائم داشته باشد. (حداقل ۲ – حداکثر ۲ – بی‌شمار) ج) تابع $f(x) = \left[x\right]$ در بازهٔ $(۰,۲)$ دارای ..... نقطهٔ ماکسیمم نسبی است. (صفر– یک –دو – بی‌شمار) ($\left[\ \right]$ نماد جزءصحیح است) د) تابع $f(x) = \lvert x \rvert$ در بازهٔ $\left[-۱,۱\right]$ دارای ..... نقطهٔ بحرانی است. (صفر– یک –دو – سه)	۱
۳	نمودار تابع $y = f(x)$ در زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = ۱ - f(۱ - ۲x)$ را رسم کنید.  	۱
۴	فرض کنیم $\log_{۰/۳}(۲x - ۱) \leq \log_{۰/۳}(۲ - x)$. حدود x را بیابید.	۱/۲۵
۵	مقادیر a , b را چنان بیابید که چندجمله‌ای $۲x^{۳} - ax + b$ بر عبارت $۱ - x$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر عبارت $۲ + x$ برابر ۹- باشد.	۱/۲۵
۶	چند مثلث به مساحت ۳ سانتی‌متر مربع داریم که طول دو ضلع آن ۵ و ۷ سانتی‌متر باشد؟ چرا؟	۰/۷۵
۷	توابع $y = \cos x - \sin x$ و $y = \sqrt{۲}$ را درنظر بگیرید. با تشکیل یک معادلهٔ مثلثاتی و حل آن، تعیین کنید این دو تابع در بازهٔ $\left[۰,۲\pi\right]$ چند نقطهٔ برخورد دارند؟ طول نقطه یا نقاط برخورد را به‌دست آورید.	۱/۵

۸	قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ در زیر رسم شده است. با ارائهٔ دلیل، مقادیر c, b, a را به‌دست آورید. ($b > ۰$)  	۱/۲۵
۹	نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. موارد خواسته شده را بنویسید. الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ د) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)$  	۱
۱۰	نمودار تابع $f(x) = \dfrac{۲x^۲ - x - ۶}{x^۲ - ۴x + ۴}$ را در اطراف مجانب قائم آن رسم کنید. (با ارائهٔ دلیل)	۱/۲۵
۱۱	حدود زیر را به‌دست آورید. ($[\ ]$ نماد جزءصحیح است) الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{۱ - ۲x}{\sqrt{x^۲ - ۱}}$ ب) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{۲}} \dfrac{[x]}{\tan x}$	۱/۲۵
۱۲	قضیه: اگر تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد، در این نقطه پیوسته است.	۱/۲۵
۱۳	مشتق توابع زیر را به‌دست آورید: (ساده کردن مشتق لازم نیست) الف) $f(x) = \dfrac{\sqrt[۳]{x} + ۶}{۲x^۲ - x - ۱}$ ب) $f(x) = x^۲ . \sin^۳ x$	۱/۵
۱۴	مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & x < -۱ \\ x^۲ - ۴ & x \geq -۱ \end{cases}$ را در نقطهٔ به طول -۱ بررسی کنید.	۱/۲۵
۱۵	معادلهٔ حرکت یک متحرک بر حسب ثانیه به صورت $f(t) = t^۲ - ۵t + ۷$ است. در چه لحظه‌ای سرعت متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی $[۱, ۳]$ با سرعت لحظه‌ای برابر می‌شود؟	۱
۱۶	مقادیر اکسترمم مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x + ۱$ را در بازهٔ $[-۲, ۲]$ بیابید.	۱/۲۵
۱۷	مقادیر a , b را چنان بیابید که نقطهٔ $(-۱, ۲)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + ۵$ باشد.	۱/۲۵
	موفق باشید	جمع ۲۰

راهنمای نمره‌گذاری درس: حسابان ۲	پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: اردیبهشت ماه (شبه نهایی ۴۰۵)	شماره ۱

ردیف		نمره
۱	الف) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۱۴) ب) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۲۰) ج) درست (۰/۲۵) (صفحه ۶۸) د) نادرست (۰/۲۵) (صفحه ۱۲۲)	۱
۲	الف) دو (۰/۲۵) (صفحه ۳۶) ب) بی‌شمار (۰/۲۵) (صفحه ۵۵) ج) بی‌شمار (۰/۲۵) (صفحه ۱۱۶) د) سه (۰/۲۵)(صفحه ۱۱۷)	۱
۳	$\begin{array}{c\|cccc} & ۲ & ۱ & -۱ & -۲ \\ x & -۳ & -۱ & ۳ & ۵ \\ \hline y & ۰ & ۲ & -۲ & -۲ \\ & ۱ & -۱ & ۳ & ۳ \end{array}$  هر نقطهٔ درست شکل (۰/۲۵) (صفحه ۱۲)	۱
۴	تابع $y=\log_{۰/۳} x$ اکیداً نزولی است. (۰/۲۵) پس $\log_{۰/۳}(۲x-۱)\le \log_{۰/۳}(۲-x)\Rightarrow ۲x-۱\ge ۲-x\Rightarrow \underbrace{x\ge ۱}_{(۰/۲۵)}$ (۱) $۲x-۱>۰\Rightarrow \underbrace{x>\frac{۱}{۲}}_{(۰/۲۵)}$ (۲) $۲-x>۰\Rightarrow \underbrace{x<۲}_{(۰/۲۵)}$ (۳) $\xrightarrow{(۱)\cap(۲)\cap(۳)} \underbrace{۱\le x<۲}_{(۰/۲۵)}$ (صفحه ۱۸)	۱/۲۵
۵	$۱-x=۰\Rightarrow \underbrace{x=۱}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow \underbrace{۲(۱)^۳-a(۱)+b=۰}_{(۰/۲۵)}$ $۲+x=۰\Rightarrow \underbrace{x=-۲}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow \underbrace{۲(-۲)^۳-a(-۲)+b=-۹}_{(۰/۲۵)}$ $\Rightarrow \underbrace{a=۳\ ,\ b=۱}_{(۰/۲۵)}$ (صفحه ۲۲)	۱/۲۵
۶	$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\theta\Rightarrow \underbrace{۳=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۷\sin\theta}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow \underbrace{\sin\theta=\frac{۶}{۳۵}<۱}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow$ دو مثلث داریم (۰/۲۵) (صفحه ۴۴)	۰/۷۵

۷	$\cos x - \sin x = \sqrt{۲} \Rightarrow \underbrace{(\cos x - \sin x)^۲ = ۲}_{(۰/۲۵)}$ $\Rightarrow \underbrace{\cos^۲ x + \sin^۲ x - ۲\sin x \cos x = ۲}_{(۰/۲۵)}$ $\Rightarrow \underbrace{\sin ۲x = -۱}_{(۰/۲۵)}$ $\Rightarrow \underbrace{x = k\pi - \frac{\pi}{۴}}_{(۰/۲۵)}$ با امتحان جواب، فقط جواب‌های به فرم $x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴}$ قابل قبول است، (۰/۲۵) که دو تابع در بازهٔ $[۰ , ۲\pi]$ فقط یک نقطهٔ برخورد $\frac{۷\pi}{۴}$ دارند. (۰/۲۵) (صفحه ۴۰)	۱/۵
۸	$\frac{۳}{۴}T = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \underbrace{T = \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{\lvert b \rvert}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{b = ۳}_{(۰/۲۵)}$ $\underbrace{\left.\begin{array}{l} \max = ۳ = c + \lvert a \rvert \\ \min = -۱ = c - \lvert a \rvert \end{array}\right\}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{c = ۱}_{(۰/۲۵)} , \lvert a \rvert = ۲ \Rightarrow \underbrace{a = -۲}_{(۰/۲۵)}$ (صفحه ۳۴)	۱/۲۵
۹	الف) ۲ (۰/۲۵) ب) ۲- (۰/۲۵) ج) $-\infty$ (۰/۲۵) د) $+\infty$ (۰/۲۵) (صفحه ۴۸ و ۶۱)	۱
۱۰	$\underbrace{\lim_{x \to ۲^+} \frac{۲x^۲ - x - ۶}{x^۲ - ۴x + ۴} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{(۲x+۳)(x-۲)}{(x-۲)^۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{۲x+۳}{x-۲} = \frac{۷}{۰^+}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{+\infty}_{(۰/۲۵)}$ $\underbrace{\lim_{x \to ۲^-} \frac{۲x^۲ - x - ۶}{x^۲ - ۴x + ۴} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{(۲x+۳)(x-۲)}{(x-۲)^۲} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{۲x+۳}{x-۲} = \frac{۷}{۰^-}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{-\infty}_{(۰/۲۵)}$ $x = ۲$ مجانب قائم است.  (۰/۲۵) (صفحه ۵۷)	۱/۲۵

۱۱	الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۱-۲x}{\sqrt{x^۲-۱}}=\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۲x}{\sqrt{x^۲}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۲x}{\lvert x\rvert}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-۲x}{-x}}_{(۰/۲۵)}=\underset{(۰/۲۵)}{۲}$ (صفحه ۶۶) ب) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{۲}}\dfrac{[x]}{\tan x}=\dfrac{-۲}{\underbrace{\infty}_{(۰/۲۵)}}=\underset{(۰/۲۵)}{۰}$ (صفحه ۶۹)	۱/۲۵
۱۲	تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است. پس $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$ (۰/۲۵) لذا $\underbrace{\lim\limits_{x\to a}f(x)-f(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim\limits_{x\to a}(x-a)=L\times۰=۰}_{(۰/۵)}$ پس $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ (۰/۲۵) یعنی تابع f در نقطهٔ a پیوسته است. (صفحه ۸۶)	۱/۲۵
۱۳	الف) $f(x)=\dfrac{\sqrt[۳]{x}+۶}{۲x^۲-x-۱}\Rightarrow\underbrace{f'(x)=\dfrac{\overbrace{\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(۲x^۲-x-۱)}^{(۰/۲۵)}-\overbrace{(۴x-۱)(\sqrt[۳]{x}+۶)}^{(۰/۲۵)}}{(۲x^۲-x-۱)^۲}}_{(۰/۲۵)}$ ب) $f(x)=x^۲.\sin^۳x\Rightarrow f'(x)=\overbrace{۲x.\sin^۳x}^{(۰/۲۵)}+\overbrace{x^۲(\cos x)}^{(۰/۲۵)}\overbrace{(۳\sin^۲x)}^{(۰/۲۵)}$ (صفحه ۹۷)	۱/۵

۱۴	$\underbrace{f'_-(-۱)=\lim_{x\to -۱^-}\frac{f(x)-f(-۱)}{x-(-۱)}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\lim_{x\to -۱^-}\frac{۲x-۱-((-۱)^۲-۴)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱^-}\frac{۲x+۲}{x+۱}=۲}_{(۰/۲۵)}$ $\underbrace{f'_+(-۱)=\lim_{x\to -۱^+}\frac{f(x)-f(-۱)}{x-(-۱)}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\lim_{x\to -۱^+}\frac{x^۲-۴-((-۱)^۲-۴)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱^+}\frac{x^۲-۱}{x+۱}=-۲}_{(۰/۲۵)}$ چون $f'_-(-۱)\neq f'_+(-۱)$ تابع در نقطهٔ ۱- مشتق‌پذیر نیست. (۰ / ۲۵) (صفحه ۱۰۰)	۱/۲۵
۱۵	سرعت متوسط $=\underbrace{\frac{f(۳)-f(۱)}{۳-۱}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{(۳^۲-۵(۳)+۷)-(۱^۲-۵(۱)+۷)}{۲}=-۱}_{(۰/۲۵)}$ سرعت لحظه‌ای $=\underbrace{f'(t)=۲t-۵=-۱}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow t=۲$ در لحظهٔ $t=۲$ سرعت متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی $[۱\ ,\ ۳]$ با سرعت لحظه‌ای برابر می‌شود. (۰ / ۲۵) (صفحه ۱۱۰)	۱
۱۶	$f(x)=x^۳-۳x^۲-۹x+۱\Rightarrow \underbrace{f'(x)=۳x^۲-۶x-۹=۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow \underbrace{x=-۱\ ,\ x=۳\notin[-۲,۲]}_{(۰/۲۵)}$ $\underbrace{f(-۲)=-۱\quad ,\quad f(۲)=-۲۱\quad ,\quad f(-۱)=۶}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow ۶=$ ماکسیمم مطلق (۰ / ۲۵) $-۲۱=$ مینیمم مطلق (۰ / ۲۵) (صفحه ۱۱۸)	۱/۲۵
۱۷	$f(x)=x^۳+ax^۲+bx+۵\Rightarrow \underbrace{f'(x)=۳x^۲+۲ax+b}_{(۰/۲۵)}\xrightarrow{x=-۱}\underbrace{۳(-۱)^۲+۲a(-۱)+b=۰}_{(۰/۲۵)}$ $f(x)=x^۳+ax^۲+bx+۵\xrightarrow{x=-۱}\underbrace{(-۱)^۳+a(-۱)^۲+b(-۱)+۵=۲}_{(۰/۲۵)}$ $\begin{cases}b-۲a=-۳\\-b+a=-۲\end{cases}\Rightarrow \underbrace{a=۵}_{(۰/۲۵)}\ ,\ \underbrace{b=۷}_{(۰/۲۵)}$ (صفحه ۱۲۶)	۱/۲۵
جمع	موفق باشید	۲۰