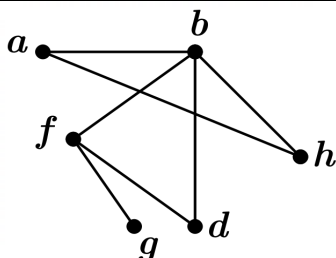


سؤالات آزمون درس : ریاضیات گسسته		پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: اردیبهشت ماه (شبه نهایی ۴۰۵)
ردیف	سؤالات پاسخ‌برگ دارد- استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			نمره
۱	درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ ، آنگاه $a + c \mid b + d$. ج) در مربع لاتین A از مرتبهٔ ۴، جای دو سطر را عوض می‌کنیم تا مربع لاتین B حاصل شود. در این صورت، دو مربع A و B متعامد نیستند. د) مربع لاتین مرتبهٔ ۶ نداریم.			۱
۲	جاهای خالی را کامل کنید. الف) اگر $a \mid b$ آنگاه $[a, b]$ برابر با است. ب) درجه هر رأس گراف C_n برابر با است. ج) اندازه گراف P_n برابر با است. د) مجموع درایه‌های مربع لاتین مرتبهٔ ۳ برابر با است.			۱
۳	اگر a, b, c سه عدد حقیقی باشند، نشان دهید $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.			۱/۵
۴	برای عدد صحیح و فرد a داریم $a + 2 \mid b$. باقیماندهٔ تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ بر ۸ را بیابید.			۱/۵
۵	فرض کنید a عددی طبیعی است و برای هر عدد طبیعی n داریم $a \mid 6n + 14$ و $a \mid 4n + 9$. مقدار a را بیابید.			۱
۶	عبارات هم‌نهشتی $a \equiv b$ و $b \equiv c$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید $a \equiv c$.			۱
۷	تمام اعداد طبیعی کمتر از ۲۰ را بیابید که ۴ برابر آنها منهای ۲۳۲، بر ۶ بخش پذیر باشند. (محاسبات نوشته شود)			۱/۵
۸	۲۹ دی‌ماه یک سال، روز سه‌شنبه است. ۳ تیر همان سال چندشنبه است؟ (محاسبات نوشته شود)			۰/۷۵
۹	۱۱ نفر در یک مهمانی شرکت می‌کنند. به علت زیادی مهمانان، هر فرد به برخی از مهمانان دست می‌دهد. آیا امکان دارد هر فرد فقط به ۷ نفر دست بدهد؟ چرا؟			۱
۱۰	نشان دهید، تعداد رئوس فرد در هر گراف، عددی زوج است.			۱
۱۱	گراف G روبرو را در نظر بگیرید. الف) $N_G[a]$ را بنویسید. ب) اندازهٔ گراف مکمل را محاسبه کنید. پ) مسیری به طول ۴ معرفی کنید.			۱/۲۵



۱۲	فاصله هر دو روستا از شش روستای a, b, c, d, f, g بر حسب کیلومتر در جدول زیر آمده است. می‌خواهیم در برخی از روستاها مرکز بهداشت بسازیم به طوریکه هر فرد از این روستاها، برای رسیدن به یک مرکز بهداشت، مسافت بیش از ۲۰ کیلومتر طی نکند. با رسم گراف مناسب و ارائه دلیل، تعیین کنید حداقل چند مرکز بهداشت باید ساخته شود؟ در کدام یک از روستاها؟	۲																																																	
	<table><tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>c</td><td>d</td><td>f</td><td>g</td></tr><tr><td>a</td><td>۰</td><td>۱۲</td><td>۱۷</td><td>۵</td><td>۱۵</td><td>۲۵</td></tr><tr><td>b</td><td>۱۲</td><td>۰</td><td>۳۵</td><td>۱۰</td><td>۲۸</td><td>۴۰</td></tr><tr><td>c</td><td>۱۷</td><td>۳۵</td><td>۰</td><td>۳۰</td><td>۵۵</td><td>۲۶</td></tr><tr><td>d</td><td>۵</td><td>۱۰</td><td>۳۰</td><td>۰</td><td>۲۹</td><td>۳۳</td></tr><tr><td>f</td><td>۱۵</td><td>۲۸</td><td>۵۵</td><td>۲۹</td><td>۰</td><td>۱۷</td></tr><tr><td>g</td><td>۲۵</td><td>۴۰</td><td>۲۶</td><td>۳۳</td><td>۱۷</td><td>۰</td></tr></table>		a	b	c	d	f	g	a	۰	۱۲	۱۷	۵	۱۵	۲۵	b	۱۲	۰	۳۵	۱۰	۲۸	۴۰	c	۱۷	۳۵	۰	۳۰	۵۵	۲۶	d	۵	۱۰	۳۰	۰	۲۹	۳۳	f	۱۵	۲۸	۵۵	۲۹	۰	۱۷	g	۲۵	۴۰	۲۶	۳۳	۱۷	۰	
	a	b	c	d	f	g																																													
a	۰	۱۲	۱۷	۵	۱۵	۲۵																																													
b	۱۲	۰	۳۵	۱۰	۲۸	۴۰																																													
c	۱۷	۳۵	۰	۳۰	۵۵	۲۶																																													
d	۵	۱۰	۳۰	۰	۲۹	۳۳																																													
f	۱۵	۲۸	۵۵	۲۹	۰	۱۷																																													
g	۲۵	۴۰	۲۶	۳۳	۱۷	۰																																													
۱۳	یک گراف همبند از مرتبه ۸ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. همچنین γ - مجموعه آن را مشخص کنید.	۱																																																	
۱۴	به چند طریق می‌توان از یک کلاس ۱۰ نفره، ۵ نفر را برای تیم فوتبال، ۳ نفر را برای تیم والیبال و ۲ نفر را برای تیم بسکتبال انتخاب کرد؟ جواب نهایی را محاسبه کنید.	۱																																																	
۱۵	تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$ ، با شرط $x_i > 1$ ؛ $1 \leq i \leq 4$ را بیابید.	۲																																																	
۱۶	در یک مسابقه اتومبیل‌رانی قرار است ۳ راننده در ۳ روز اول هفته با ۳ ماشین مختلف در ۳ مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری که شرایط زیر برقرار باشد: (الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛ (ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛ (پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛ (ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود؛ (ث) راننده شماره ۲ در روز دوشنبه با ماشین شماره ۱ در مسیر شماره ۳ رانندگی کند. برای این منظور یک برنامه‌ریزی انجام دهید.	۱/۵																																																	
۲۰	موفق باشید	جمع																																																	

راهنمای نمره‌گذاری درس: ریاضیات گسسته			پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	نوبت: اردیبهشت ماه (شبه نهایی ۴۰۵)
ردیف	نمره				
۱	۱	الف) نادرست (۰ / ۲۵) (صفحه ۳) ج) درست (۰ / ۲۵) (صفحه ۶۵) ب) نادرست (۰ / ۲۵) (صفحه ۱۲) د) نادرست (۰ / ۲۵) (صفحه ۶۳)			
۲	۱	الف) $b \mid b$ (۰ / ۲۵) (صفحه ۱۴) ج) ۴ (۰ / ۲۵) (صفحه ۳۹) ب) ۲ (۰ / ۲۵) (صفحه ۳۸) د) ۱۸ (۰ / ۲۵) (صفحه ۶۱)			
۳	۱/۵	$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \Leftrightarrow \underbrace{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}_{(۰/۲۵)} \geq 2ab + 2ac + 2bc$ $\Leftrightarrow \underbrace{a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2}_{(۰/۲۵)} \geq 2ab + 2ac + 2bc$ $\Leftrightarrow \underbrace{(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2)}_{(۰/۲۵)} \geq 0$ $\Leftrightarrow \underbrace{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2}_{(۰/۲۵)} \geq 0$ عبارت همواره درست. (۰ / ۲۵) استفاده از نماد $\Leftrightarrow$ (۰ / ۲۵) (صفحه ۷)			
۴	۱/۵	a عددی فرد است پس $a + ۲$ نیز فرد است. (۰ / ۲۵) چون $a + ۲ \mid b$ ، عدد b نیز فرد است. (۰ / ۲۵) پس $\left. \begin{array}{l} a^2 = 8q + 1 \\ b^2 = 8k + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{a^2 + b^2 + 3}_{(۰/۲۵)} = 8q + 8k + 5 = 8q' + 5 \Rightarrow \underbrace{r}_{(۰/۲۵)} = 5$ (صفحه ۱۵)			
۵	۱	$\left. \begin{array}{l} a \mid 4n + 9 \Rightarrow a \mid 12n + 27 \\ a \mid 6n + 14 \Rightarrow a \mid 12n + 28 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{a \mid 1}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{a = 1}_{(۰/۲۵)}$ (صفحه ۱۲)			
۶	۱	$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \Rightarrow \underbrace{m \mid b - a}_{(۰/۲۵)} \\ b \equiv c \Rightarrow \underbrace{m \mid c - b}_{(۰/۲۵)} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{m \mid c - a}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{a \equiv c}_m$ (صفحه ۲۰)			

۷	عدد طبیعی را x در نظر می‌گیریم. پس $\underbrace{4x - 232 \equiv 0}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{4x \equiv 232}_{(4,6)=2} \xrightarrow{(0/25)} \underbrace{x \equiv 58}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{x = 3k + 1}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{x = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19}_{(0/25)}$ (صفحه ۲۷)														
۸	<table border="1"><tr><td>تیر</td><td>مرداد</td><td>شهریور</td><td>مهر</td><td>آبان</td><td>آذر</td><td>دی</td></tr><tr><td>۲۸</td><td>۳۱</td><td>۳۱</td><td>۳۰</td><td>۳۰</td><td>۳۰</td><td>۲۹</td></tr></table> $\underbrace{29 + 3(30) + 2(31) + 28}_{(0/5)} \equiv 6 \Rightarrow 6 \text{ روز به عقب} \Rightarrow (0/25) \text{ چهارشنبه}$ (صفحه ۲۴)	تیر	مرداد	شهریور	مهر	آبان	آذر	دی	۲۸	۳۱	۳۱	۳۰	۳۰	۳۰	۲۹
تیر	مرداد	شهریور	مهر	آبان	آذر	دی									
۲۸	۳۱	۳۱	۳۰	۳۰	۳۰	۲۹									
۹	خیر. $(0/25)$ زیرا اگر مهمانان را رئوس گراف و دست دادن هر دو نفر را یک یال در نظر بگیریم، باید یک گراف ۷ منتظم از مرتبه ۱۱ داشته باشیم. $(0/25)$ در این صورت $(0/25) \quad q = \frac{7 \times 11}{2} = 38.5$ که امکان‌پذیر نیست. $(0/25)$ (صفحه ۳۵)														
۱۰	مجموع درجات رئوس زوج گراف را a و مجموع درجات رئوس فرد گراف را b می‌نامیم. پس a زوج است $(0/25)$ و داریم: $\underbrace{a + b = 2q}_{(0/25)} \Rightarrow b = 2q - a \text{ زوج } (0/25)$ بنابراین مجموع تعدادی عدد فرد، زوج شده است. لذا باید آن تعداد، عددی زوج باشد. یعنی تعداد رئوس فرد در هر گراف، عددی زوج است. $(0/25)$ (صفحه ۴۰)														
۱۱	الف) $\{a, b, h\}$ $(0/25)$ (صفحه ۳۶) ب) $q = \frac{p(p-1)}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \Rightarrow \underbrace{q_{\bar{G}} = 15 - 7}_{(0/25)} = 8$ (ب) ج) $gfbha$ یا مسیرهای دیگر به طول ۴ $(0/25)$ (صفحه ۳۸)														

۲	هر یک از روستاها را یک رأس در نظر می‌گیریم و هر دو روستا که فاصله آنها حداکثر ۲۰ کیلومتر است را با یک یال به هم وصل می‌کنیم تا گراف زیر حاصل شود. (۰ / ۷۵) مجموعه $\{a, g\}$ (یا $\{a, f\}$) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است. (۰ / ۲۵) زیرا گراف را احاطه می‌کند و $(۰ / ۵) \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{6}{4 + 1} \right\rceil = 2$ پس $\gamma(G) = 2$ (۰ / ۲۵) لذا باید حداقل در دو روستای a, g (یا a, f) مرکز بهداشت احداث کرد. (۰ / ۲۵) (صفحه ۵۲)	۱۲
۱	برای گراف همبند زیر، $\{a, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم یکتا با اندازه ۲ است. (۰ / ۲۵) (۰ / ۷۵) (صفحه ۵۳)	۱۳
۱	$\underbrace{\binom{10}{5}}_{(۰/۷۵)} \times \underbrace{\binom{5}{3}}_{(۰/۷۵)} = \underbrace{2520}_{(۰/۲۵)} \text{ یا } \underbrace{\frac{10!}{5! \times 3! \times 2!}}_{(۰/۷۵)} = \underbrace{2520}_{(۰/۲۵)}$ (صفحه ۵۸)	۱۴
۲	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16 \xrightarrow{x_1, x_2, x_3 \geq 2} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16 - 2 - 2 - 2 = 10$ (۰ / ۲۵) $\underbrace{x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 10 - 4 = 6}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$ (۰ / ۲۵) $\underbrace{x_2 = 3 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 10 - 9 = 1}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$ (۰ / ۲۵) تعداد جواب $28 + 3 = 31$ (۰ / ۲۵) (صفحه ۶۱)	۱۵

راننده‌ها را D_1 , D_2 , D_3 در نظر می‌گیریم.

۱/۵

ماشین‌ها			
روزها	D_1	D_2	D_3
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۲	۳	۱
دوشنبه	۳	۱	۲

A

(۰ / ۲۵)

مسیرها			
روزها	D_1	D_2	D_3
شنبه	۲	۱	۳
یکشنبه	۳	۲	۱
دوشنبه	۱	۳	۲

B

(۰ / ۲۵)

ماشین و مسیرها			
روزها	D_1	D_2	D_3
شنبه	۱۲	۲۱	۳۳
یکشنبه	۲۳	۳۲	۱۱
دوشنبه	۳۱	۱۳	۲۲

AB

(۰ / ۲۵)

عدد ۲۳ در مربع AB به این معناست که راننده شماره ۱ در روز یکشنبه با ماشین شماره ۲ در مسیر شماره ۳ رانندگی می‌کند. (۰ / ۲۵)

(صفحه ۷۲)

متعامد بودن دو مربع لاتین A و B (۰ / ۲۵) توجه به جایگاه عدد ۱۳ (۰ / ۲۵)

۲۰

جمع

موفق باشید